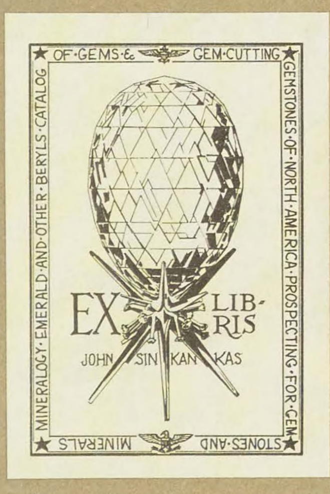
К

БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ
13

Д. Н. АРТЕМЬЕВ

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ
И СТРОЕНИЕ КРИСТАЛЛА



ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА БЕРЛИН

БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ

1. КОВАЛЕВСКИЙ. Введение в исчисление бесконечно малых.
2. БЛАУ. Автомобиль.
3. ЦАНДЕР. Нервная система.
4/5. РЮСБЕРГ. Введение в аналитическую химию. В двух частях.
6. БУКИ. Лучи Рентгена.
7. БАЙШ. Гигиена женщины.
8. ЛИНДОВ. Дифференциальное исчисление.
9. ГАССЕРТ. История полярных путешествий.
10. РОЗИН. Сердце, кровеносные сосуды, кровь и их заболевания.
11. ФАТЕР. Термодинамика.
12/15. АРТЕМЬЕВ. Кристаллография. В четырех част.
16. ИЛЬБЕРГ. Душевные болезни.
17. РИХТЕР. Введение в философию.
18/19. ОППЕНГЕЙМ. Астрономическое мировоззрение в его историческом развитии. В двух частях.
20. ФАТЕР. Практическая термодинамика.
21. АНИЧКОВ. Современная русская поэзия.
22. ТРЕМНЕР. Гипнотизм и внушение.
23. БРИК. Провода и кабели.
24. БЛОХМАН. Введение в экспериментальную химию.
25. ШТЕЙНМАН. Ледниковый период и доисторический человек.
26. ТУРН. Беспроволочная телеграфия.
27. КРАНЦ. Сферическая тригонометрия.
28/29. ФАТЕР. Новейшие тепловые двигатели. В двух частях.
30. ГЕССЕ. Учение о происхождении видов и дарвинизм.
31. КОН. Руководящие мыслители.
32/37. БАРДЕЛЕБЕН. Анатомия. В шести частях.
38. ГЕРБЕР. Человеческий голос и его гигиена.
39. АЛДАНОВ. Загадка Толстого.
40. КЕН. Электрическая передача энергии.

ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА
БЕРЛИН W 50

БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ
13

Д. Н. АРТЕМЬЕВ
ПРОФ. МОСКОВСК. ГОС. УНИВ.

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Bd. 2

ТОМ ВТОРОЙ

KRISTALLOGRAFICHESKIE PROEKTSII
КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ И СТРОЕНИЕ КРИСТАЛЛА
I STROENIE KRISTALLA

Kristallographische Projektionen und Struktur der Kristalle.

1923

ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА БЕРЛИН

Лейпциг, Типография Б. Г. Тейбнера.

III. МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ.

1. ПРОЕКЦИИ И ИХ ЗНАЧЕНИЕ.

Рассматривая взаимоотношения различных направлений и плоскостей в пространстве, мы можем исследовать эти взаимоотношения при помощи тех или иных измерений, имея непосредственно перед собой или пространственную фигуру, или ее изображение, связанное соответственным образом с данной фигурой. Однако, применение измерительных приемов к изображению фигуры осуществимо только в том случае, если имеющееся изображение дает возможность вполне точно восстановить изображенную пространственную фигуру со всеми ее особенностями и взаимоотношениями ее отдельных частей. Этого возможно достигнуть только в том случае, если между данной пространственной фигурой и ее изображением существует вполне определенная связь, устанавливаемая известными правилами, на основании которых и получается изображение.

Всякое изображение, связанное некоторой определенной зависимостью с изображаемым предметом, носит название проекции данного предмета. В виду того, что графическое решение вопросов планиметрии, т. е. таких вопросов, которые ограничиваются исследованием соотношений между точками, прямыми и кривыми линиями, принадлежащими одной и той же плоскости, отличается особой простотой и легкостью, обычно применяют проекцию предмета на плоскости, и только в особых случаях проектируют на некоторых кривых поверхностях или строят пространственную модель.

Проектируя пространственную фигуру на плоскости, мы заменяем пространственные элементы другими элементами, находящимися на некоторой произвольно избранной нами плоскости, причем изображающие элементы должны нахо-

диться в определенной, точно установленной, условной связи с изображаемыми пространственными элементами. Смотря по тому, какую преследуют цель, строя проекцию на плоскости, употребляются различные виды проекций. Если от изображения в первую очередь требуется наглядность, то предметы проектируют так же, как об'ектив фотографической камеры проектирует их на светочувствительную пластинку, т. е. прибегают к так называемому перспективному изображению, или перспективной проекции.

Если же желательно иметь такое изображение, в котором можно было бы при помощи определенных операций производить те измерения, которые мы можем делать, имея в своем распоряжении самый проектируемый предмет, то приходится применять другие виды проекций. Кроме того, мы можем пред'являть к проекции еще и требование простоты связи между элементами изображаемого предмета и их изображениями в проекции. Такая простота связи обуславливает быстрый и легкий переход от проекции к действительному положению элементов предмета в пространстве и, наоборот, легкое получение самой проекции.

2. ПРОЕКЦИИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ПРИ ИЗОБРАЖЕНИИ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ НА ПЛОСКОСТИ.

Для изображения кристаллических многогранников обычно применяются проекции, дающие изображение многогранника на плоскости.

Для проектирования кристаллов наиболее употребительными и удобными являются следующие виды проекций:

1) Линейная и гномоническая проекции.
2) Грамма — и гномостереографические проекции.
3) Ортогональные проекции.

Линейная, гномоническая и стереографические проекции употребляются во всех тех случаях, когда необходимо изобразить на плоскости только угловые величины.

Ортогональную проекцию употребляют для получения рисунка кристалла. Так как при изображении кристалла на

плоскости могут преследоваться различные, заранее поставленные цели, в зависимости от которых и выбирают тот или другой вид проекции, то мы прежде всего должны дать себе ясный отчет в том, какую цель мы будем преследовать при изображении кристаллического многогранника на плоскости.

Поставим себе задачу: изобразить на плоскости все те элементы данного кристаллического многогранника, которые, по самой своей сущности, являются постоянными и вполне определенными элементами, служащими отличительной особенностью данного кристаллического многогранника. Если мы поставим себе такую задачу, то при изображении кристаллического многогранника будет всего выгоднее применять такие проекции, в которых, с одной стороны, было бы вполне отчетливо изображено все то, что является существенным для характеристики данного кристалла, а с другой стороны, очень желательно совершенно избежать изображения всех тех элементов кристаллического многогранника, которые являются чисто случайными, переменными и совершенно не влияющими на основу характеристики кристаллического вещества. Закон постоянства угловых величин в кристаллическом многограннике совершенно определенно указывает на то, какие элементы кристаллического многогранника являются постоянными и основными для кристалла. Такими постоянными элементами являются исключительно углы.

Если мы будем передвигать некоторые грани кристаллического многогранника параллельно самим себе, оставляя другие грани в их первоначальном положении, то мы можем очень сильно изменить внешний вид кристалла, хотя все угловые его отношения останутся прежними. В самом деле, при параллельном перемещении граней кристалла углы между гранями не изменяются, точно так же не изменяются и углы между ребрами при их перемещении параллельно самим себе. В виду этого, мы можем сделать вывод, что различные элементы кристаллического многогранника имеют разное значение для его характеристики и можем, при изображении кристалла в проекции, совершенно устранить из изображения все те элементы кристаллического многогранника, которые

не являются для него существенными. Такими несущественными элементами должны быть признаны длины ребер и размеры граней. Кроме того, при изображении кристалла, необходимо выбрать такой вид проекции, чтобы все угловые величины кристаллического многогранника выступали бы наиболее резко и отчетливо. Вообще, можно принять, что наиболее подходящей для изображения кристаллического многогранника будет такая его проекция, на которой можно непосредственно отсчитывать углы между теми геометрическими образами, которые изображают грани и ребра кристалла. Кроме того, такая проекция совершенно не должна содержать в себе изображения длин ребер и площадей граней, как чисто случайных элементов, не играющих роли при характеристике данного кристаллического вещества.

Для того, чтобы устранить все случайные элементы кристаллического многогранника, мы можем перед проектированием подвергнуть его такому изменению, при котором исчезают все длины и размеры площадей, но в то же время остаются в неприкосновенности все угловые величины, характеризующие данный многогранник. Этого легко достигнуть следующим образом.

Возьмем в пространстве (рис. 87) какую-нибудь точку и будем переносить все грани и ребра кристаллического

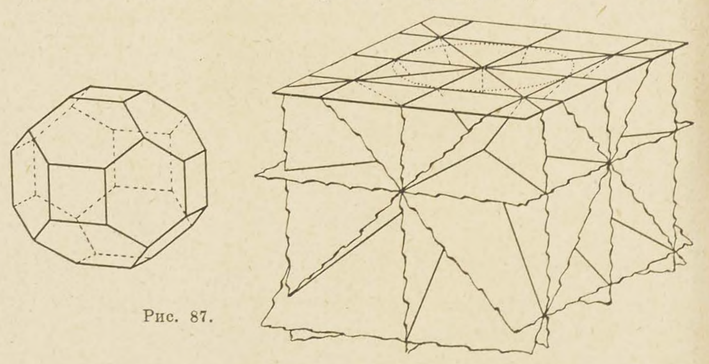


Рис. 87.

многогранника параллельно самим себе до тех пор, пока они не пройдут через выбранную нами точку. При таком

переносе граней и ребер мы получим вместо первоначально взятого нами многогранника, так называемый, пучек граней и ребер. Избранная точка в пространстве, в которой пересекаются все грани и ребра, получает название центра этого пучка.

В таком пучке прямых линий и плоскостей мы можем каждую линию и каждую плоскость продолжать беспредельно, совершенно не изменяя тех углов, которые они образуют между собой, причем все эти углы будут в точности равны углам между соответственными гранями и ребрами проектируемого кристаллического многогранника. Таким образом, заменив взятый кристаллический многогранник пучком граней и ребер, мы устранили все случайные элементы — размеры площадей и длины ребер, сделав их неопределенными, и кроме того сохранили все величины, существенные для характеристики данного кристалла, а именно величины углов между гранями и между ребрами.

Заменив данный кристаллический многогранник пучком граней и ребер, мы можем уже проектировать этот пучек на плоскости, называемой плоскостью проекций, применяя те привила, которые относятся к данному виду проекций. В этом случае, как было уже сказано, мы можем применять два вида проекций.

1-ый вид. Линейная и гномоническая проекции.

2-ой вид. Грамма — и гномостереографические проекции.

Каждый из этих двух видов проекций содержит в себе две проекции: одну прямую, получаемую непосредственным изображением данного пучка граней и ребер, и другую — полярную, получаемую путем изображения пучка, полярного данному.

3. ЛИНЕЙНАЯ И ГНОМОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИИ.

1) Линейная проекция. При изображении пучка граней и ребер в линейной проекции за плоскость чертежа принимается плоскость, лежащая выше центра пучка, причем за проекции граней пучка принимаются линии их пересечения с плоскостью чертежа. Проекциями ребер служат точки

пересечения ребер пучка с плоскостью чертежа. Расстояние центра пучка от плоскости проекций измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из центра пучка на плоскость чертежа.

Точка пересечения этого перпендикуляра с плоскостью чертежа принимается за центр круга, описываемого на плоскости чертежа радиусом, равным расстоянию центра пучка от плоскости чертежа.

При таком построении, положение центра круга на плоскости чертежа и радиус этого круга совершенно точно определяют положение центра пучка относительно плоскости чертежа и его расстояние от этой плоскости. Кроме того, все линии пересечения граней и ребер пучка с плоскостью чертежа принимают совершенно определенное положение на плоскости чертежа.

Определение положения проекции перпендикуляра, опущенного из центра пучка на плоскость чертежа, и знание длины этого перпендикуляра совершенно необходимо для того, чтобы линейная проекция пучка граней и ребер была вполне определенной. В самом деле, двигая по плоскости чертежа проекцию перпендикуляра, опущенного из центра пучка, мы будем в то же время перемещать все линии и точки пересечения граней и ребер пучка с плоскостью чертежа. Изменяя расстояние центра пучка от плоскости чертежа, мы тем самым будем изменять расстояния линейных проекций граней и ребер пучка от проекции перпендикуляра, опущенного из центра пучка.

2) Гномоническая проекция. Для изображения пучка граней и ребер в гномонической проекции заменяем каждую грань пучка перпендикуляром, восставленным к ней из центра пучка, а каждое ребро пучка заменяем перпендикулярной к нему плоскостью, проходящей через центр пучка. Сделав такие замены, мы получаем пучек граней и ребер, полярный первоначальному пучку.

Построив линейную проекцию полярного пучка, получим гномоническую проекцию первоначально взятого пучка граней и ребер.

4. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОЙ И ГНОМОНИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЙ.

На основании общих правил построения линейной проекции, принимаем плоскость, находящуюся выше центра пучка на расстоянии R, за плоскость чертежа (плоскость проекций) (рис. 88). Пусть эта плоскость будет MN, перпендикулярная к плоскости верхнего рисунка и пересекающая эту последнюю по линии MN. На нижнем рисунке (того же рис. 88) плоскость MN совмещена с плоскостью чертежа, причем круг, изображенный на нижнем рисунке, имеет центр O при длине радиуса $R = OS$.

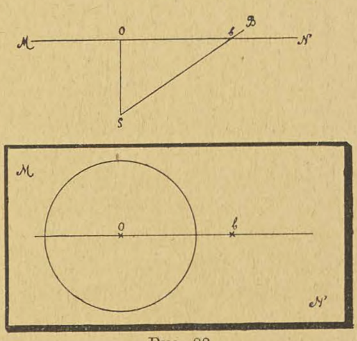


Рис. 88.

Представим себе какое-нибудь направление SB, проходящее через центр пучка S и лежащее в плоскости верхнего рисунка (рис. 88). В пересечении с плоскостью MN направление SB даст точку b. Эта точка и будет линейной проекцией данного направления SB. Таким образом, все прямые пучка в линейной проекции изобразятся на плоскости чертежа MN в виде точек, находящихся на различных расстояниях от центра проекций O.

Различие в расстояниях проекций ребер пучка от центра O будет находиться в прямой зависимости от величины угла OSb. В самом деле, если OS будет перпендикуляр, опущенный из центра пучка на плоскость проекций MN, то из прямоугольного треугольника bOS, где $\angle bSO = \alpha$, получаем: $Ob = R \operatorname{tg} \alpha$. Так как R является величиной постоянной, то расстояние Ob проекции ребра пучка от центра O будет прямо пропорционально тангенсу угла наклона ребра Sb к нормали OS.

Положим (рис. 89), O представляет собою точку пересечения с плоскостью чертежа перпендикуляра, опущенного из центра пучка на плоскость чертежа. Радиус круга OS, опи-

санного на плоскости чертежа из центра O равен расстоянию центра пучка от плоскости чертежа. Прямая $b_1 b_2$ — линейная проекция одной из плоскостей пучка.

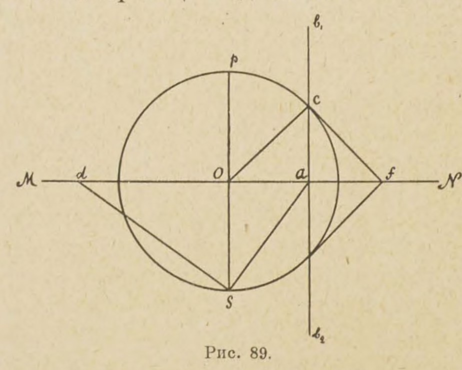


Рис. 89.

Проведем через точку O диаметр da, перпендикулярный к линии $b_1 b_2$. Приняв этот диаметр за ось вращения, повернем весь наш чертеж на 90^0 так, чтобы точка S, находящаяся на окружности и лежащая на радиусе, перпендикулярном к диаметру da, оказалась под плоскостью чертежа на перпендикуляре, восставленном из точки O к плоскости чертежа вниз. Так как OS равно расстоянию центра пучка от плоскости чертежа, и после поворота фигуры вокруг оси da на 90^0 линия OS будет перпендикулярна к плоскости чертежа, то точка S после такого поворота совпадет с центром пучка. Вообще, после поворота вокруг оси da, все точки плоскости чертежа выйдут из этой плоскости, кроме точек, находящихся на оси вращения, которые все останутся в плоскости чертежа, в том числе и точка a.

Так как точка a сохраняет свое положение на плоскости чертежа, а точка S после поворота совпадает с центром пучка, то прямая Sa будет представлять линию пересечения плоскости, изображенной в линейной проекции линией $b_1 b_2$, с плоскостью, проходящей через центр пучка и линию da, причем обе эти плоскости будут взаимно перпендикулярны.

На основании этих соображений, мы всегда можем определить угол OSa наклона изображаемой плоскости к перпендикуляру, опущенному из центра пучка на плоскость чертежа. Ясно, что такое определение можно сделать только в том случае, если на плоскости чертежа нам даны: 1) положение перпендикуляра, опущенного из центра пучка O,

2) расстояние этого центра от плоскости чертежа OS и 3) линейная проекция грани $b_1 b_2$.

Из всего только что изложенного мы выводим очень простой метод определения угла наклона проектируемой грани к перпендикуляру, опущенному из центра пучка на плоскость чертежа. Этот метод состоит в следующем. Проводим два диаметра: pS — параллельный линейной проекции изображаемой плоскости, и da — перпендикулярный этой проекции. Соединяем прямой линией один из концов параллельного диаметра (напр. S) с точкой пересечения a перпендикулярного диаметра и линейной проекции плоскости. Угол OSa и будет искомый угол наклона проектируемой плоскости к перпендикуляру, опущенному из центра пучка на плоскость чертежа.

Проведя dS перпендикулярно aS, найдем точку d — линейную проекцию ребра, перпендикулярного плоскости, изображаемой в линейной проекции линией $b_1 b_2$. Эта же точка d будет гномонической проекцией плоскости, линейная проекция которой будет линия $b_1 b_2$.

Угол, образуемый направлением пучка, изображенным в линейной проекции точкой d, с нормалью к плоскости чертежа в точке O, будет равен углу между прямыми dS и OS, т. е. равен углу dSO. Для нахождения этого угла применяем точно такой же метод, какой мы применили для нахождения угла между перпендикуляром к плоскости чертежа и проектируемой гранью.

Для определения этого угла проводим через точку d центральную секущую da и диаметр pS, перпендикулярный da. Соединив прямой точки S и d, находим угол dSO, который и будет углом между данным направлением dS и перпендикуляром SO, опущенным из центра пучка на плоскость чертежа. Наоборот, если по этому углу требуется найти положение линейной проекции ребра Sd, то мы можем отложить от линии SO угол dSO, и тогда точка d пересечения линии Sd с центральной секущей da, перпендикулярной к радиусу OS, будет искомой проекцией того направления пучка, которое образует с вертикалью данный угол dSO. Из чертежа ясно, что, чем больше данный угол, тем больше расстояние проекции прямой от центра O. Если проекция находится на окруж-

ности круга, то такое положение соответствует углу $\frac{\pi}{4} = 45^0$. Так как точка d находится, на рис. 89, на расстоянии большем длины радиуса круга, то угол dSO — больше 45^0.

При угле $dSO = 90^0$ ребро пучка будет параллельно плоскости чертежа и проекция такого ребра будет находиться в бесконечности. Вследствие этого, в линейной проекции невозможно изобразить граней и ребер, параллельных плоскости чертежа.

Так как для изображения пучка в гномонической проекции, каждая грань и ребро пучка должны быть заменены перпендикулярными к ним элементами, то, на основании только что приведенного рассуждения, мы заключаем о невозможности изображать в гномонической проекции грани и ребра первоначального пучка, перпендикулярные к плоскости чертежа.

Такая невозможность изображения некоторых элементов пучка в линейной и гномонической проекциях представляет очень существенный недостаток этих проекций.

5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНОЙ И ГНОМОНИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЯМИ.

Переход от линейной проекции какого-нибудь элемента пучка к гномонической проекции того же элемента легко осуществляется при помощи описанного выше общего построения.

Пусть прямая $b_1 b_2$ (рис. 89), представляет собою линейную проекцию некоторой грани. Проведя pS — параллельный и da — перпендикулярный диаметры и соединив точку S с a, найдем Sa — вертикальный разрез проектируемой грани. Если Sd — прямая, перпендикулярная к Sa, то точка d пересечения линии Sd с диаметром da будет гномоническою проекцией той же грани. Для нахождения линейной проекции $b_1 b_2$ некоторой грани по ее гномонической проекции, точке d, применяем обратное построение.

Если бы точка d была линейной проекцией ребра dS, то прямая $b_1 b_2$ служила бы гномонической проекцией того же ребра. Так как по условиям построения угол между Sd и aS — прямой и SO перпендикулярна da, то по известному свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на

гипотенузу, в прямоугольном треугольнике aSd имеем: $(OS)^2 = Oa \cdot Od$. Соединим прямой центр круга O и точку c пересечения окружности с линией $b_1 b_2$ и проведем касательную cf к окружности в точке c. Прямоугольные треугольники Ocf и Oac, имеющие общий угол cOa подобны, а потому: $(Oc)^2 = Oa \cdot Of$. Так как $Oc = OS$, как радиусы одного и того же круга, то $Od = Of$.

Из этого рассуждения выводим еще один способ построения гномонической проекции грани по ея линейной проекции и обратно, причем такой способ применим в том случае, если линейная проекция грани пересекает окружность основного круга проекций. В этом случае, проводим касательные к окружности в точках ее пересечения с линией $b_1 b_2$. Точка f пересечения этих касательных будет находиться на том же расстоянии от центра O и на том же диаметре, как и гномоническая проекция d данной грани. Для нахождения точки d откладываем $Od = Of$ по тому же диаметру da, но по другую сторону от центра O.

В случае, если линейная проекция не пересекает окружности, мы можем воспользоваться следующим построением (рис. 90). Из точки O опускаем перпендикуляр на линейную проекцию $b_1 b_2$ некоторой грани. Приняв a за точку пересечения двух касательных к кругу, проводим эти касательные ac и ac_1. Точка a_1, лежащая на линии cc_1, будет находиться от центра проекций O на таком же расстоянии, на каком находится искомая гномоническая проекция грани, причем эта проекция — точка d — будет лежать по другую сторону от центра, на том же диаметре Oa.

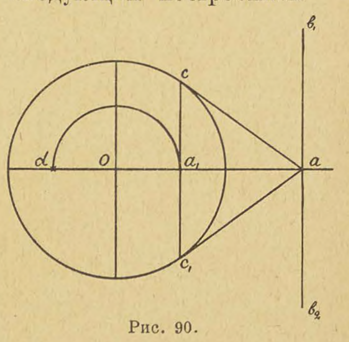


Рис. 90.

6. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ ПРИ ПОМОЩИ ЛИНЕЙНОЙ И ГНОМОНИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЙ.

Получив изображение кристаллического многогранника в линейной или гномонической проекциях, мы можем графическим путем, совершенно не прибегая к вычислениям, разрешать ряд вопросов, касающихся угловых отношений данного кристаллического многогранника. Из предыдущего мы уже видели, каким образом можно при помощи простого построения находить угол наклона грани или ребра к нормали, проведенной из центра пучка к плоскости чертежа. Кроме нахождения такого угла наклона мы рассмотрим здесь ряд задач, являющихся основными для решения самых различных вопросов, при помощи изображения кристаллического многогранника в линейной или гномонической проекции и применения самых простых геометрических построений.

Так как гномоническую проекцию мы можем рассматривать как линейную проекцию полярного пучка, причем способ построения линейной проекции данного пучка совершенно аналогичен способу получения гномонической проекции из пучка, полярного данному, то все решения задач совершенно одинаковы, будем ли мы иметь дело с изображением в линейной или в гномонической проекциях.

Задача 1. *Найти угол между двумя ребрами пучка, изображаемыми в линейной проекции двумя точками.*

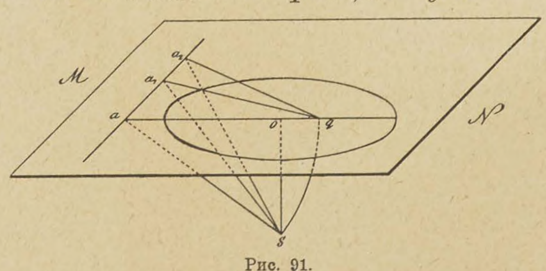


Рис. 91.

Пусть рис. 91 представляет собою перспективное изображение плоскости чертежа MN, центра пучка S, нормали SO,

опущенной из центра пучка на плоскость MN, и двух направлений пучка Sa_1 и Sa_2, проекции которых будут точки a_1 и a_2. Искомый угол в перспективе есть угол a_1Sa_2.

Общие соображения. Соединив прямой данные точки a_1 и a_2, проводим прямую Oa, перпендикулярно линии $a_1\ a_2$. Заметим, что линии aS, a_1S и a_2S, соединяющие центр пучка S с точками a, a_1 и a_2, лежат в одной плоскости, определяемой центром пучка S и линией aa_2. Приняв aa_2 за ось вращения, вращаем плоскость aSa_2 по направлению к плоскости MN до совпадения с этой последней. Так как aS и aO перпендикулярны к прямой aa_2, то после совмещения плоскостей aSa_2 и MN линии aS и aO также совместятся, причем точка S совпадет с точкой q на линии aO. Расстояние точки q от a должно быть равно длине линии aS. Кроме того, после совмещения плоскостей aSa_2 и MN линии a_1S и a_2S должны совместиться с линиями a_1q и a_2q и, следовательно, угол a_1Sa_2 совпадет с углом a_1qa_2.

Решение задачи. На основании этих соображений мы выводим общий способ решения поставленной задачи простым построением (рис. 92).

Через данные точки a_1 и a_2 проводим прямую aa_2. Из центра проекции O опускаем перпендикуляр Oa на aa_2. Кроме того, проводим радиус OS, параллельный aa_2. Приняв точку a за центр круга, а расстояние aS за радиус, проводим дугу Sq до пересечения с секущей aq. Точку q соединяем с данными точками a_1 и a_2. Угол a_1qa_2 и есть искомый угол между двумя направлениями, изображенными в линейной проекции точками a_1 и a_2.

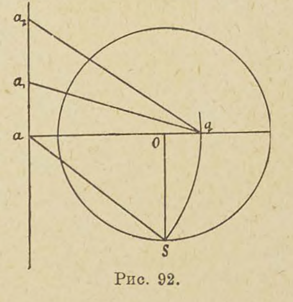


Рис. 92.

Задача 2. *Найти угол, образуемый ребром пучка, изображенным в линейной проекции точкой a, и плоскостью, представленной в той же проекции линией kl* (рис. 93).

Общие соображения. Как известно, углом между прямой и плоскостью называется угол, образуемый двумя прямыми: 1) данной прямой и 2) линией пересечения дан-

ной плоскости с плоскостью, проведенною через данную прямую перпендикулярно к данной плоскости. В этой перпендикулярной плоскости лежат обе пересекающиеся линии и образуют 4 угла, попарно равные друг другу. Два из этих углов будут больше 90^0, а два другие — меньше 90^0. Мы будем считать за угол между линией и плоскостью, тот угол, величина которого будет не более 90^0.

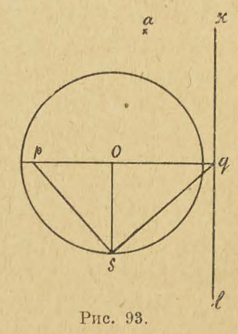


Рис. 93.

Заметим, что все плоскости, перпендикулярные данной плоскости и проходящие через некоторую постоянную точку, пересекутся между собой по нормали к данной плоскости, причем такая нормаль будет проходить через постоянную точку. На основании этих соображений заключаем, что угол между данной прямой и плоскостью будет дополнительным до 90^0 к углу, образуемому данной линией и перпендикуляром к данной плоскости. Таким образом, решение задачи сводится к решению следующих двух вопросов:

1) Найти проекцию p перпендикуляра, восставленного из центра пучка к грани, изображенной в линейной проекции линией kl.

2) Найти угол между перпендикуляром к грани и данным направлением, изображенным в линейной проекции точкой a.

Заметим, что при нахождении этого угла у нас могут встретиться 2 случая: 1) найденный угол будет меньше 90^0 и 2) найденный угол больше 90^0. В первом случае, угол между плоскостью kl и данной прямой определится как дополнительный до 90^0 к найденному углу. Во втором случае, искомый угол будет равен найденному без 90^0, как это ясно из рис. 94, изображающего плоскость, проходящую через данное ребро aa' и перпендикуляр pp' к данной плоскости, изображенной линией kl на рис. 93, причем MN — линия пересечения этой последней плоскости с плоскостью рис. 94: $\angle aSM$ — искомый угол между линией aa' и плоскостью kl. Определяя угол между линией aa' и нормалью pp' к плоскости kl, мы можем найти или 1) $\angle aSp = 90^0 - \angle aSM$, или 2) $\angle pSa' = 90^0 + \angle a'SN = 90^0 + \angle aSM$.

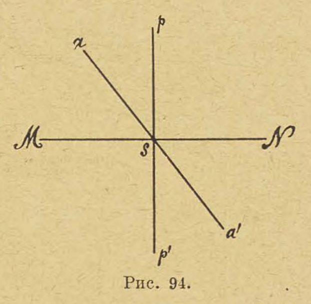


Рис. 94.

Решение задачи. (Рис. 93). Через центр проекции O проводим прямые pq перпендикулярно, и OS параллельно kl. Соединяем q и S прямой и при точке S от линии qS строим прямой угол qSp. Точка p будет проекцией перпендикуляра к плоскости, изображенной в линейной проекции линией kl. Определение угла между направлениями, проектирующимися точками a и p, уже рассмотрено в задаче 1.

Задача 3. *Найти угол между двумя плоскостями, изображенными в линейной проекции (на рис. 95) линиями* pa_1 *и* pa_2.

Общие соображения. Углом между двумя плоскостями или двугранным углом, как известно, называется угол, образуемый линиями пересечения двух данных плоскостей с третьей плоскостью, проведенной перпендикулярно к линии пересечения двух данных плоскостей.

А) Угол между плоскостями по своей величине будет дополнительным до 180^0 к углу, образуемому перпендикулярами, опущенными из некоторой внешней точки k на данные плоскости. В самом деле, пусть k (рис. 96) есть некоторая точка, находящаяся вне данных двух плоскостей, пересекающихся между собой в точке p и перпендикулярных к плоскости рис. 96. a_1p и a_2p — линии пересечения этих плоскостей с плоскостью чертежа. Опустив из точки k перпендикуляры на линии a_1p и a_2p, получаем четыреугольник ka_1pa_2' с двумя прямыми углами: $\angle pa_1k = \angle pa_2k = 90^0$.

Так как сумма углов четыреугольника равна четырем прямым, т. е. $\angle a_1pa_2 + \angle pa_1k + \angle pa_2k + \angle a_1ka_2 = 360^0$, то, подставив вместо $\angle pa_1k + \angle pa_2k$ равную их сумме величину 180^0, получаем: $\angle a_1pa_2 + \angle a_1ka_2 = 180^0$.

На основании этого соображения, мы можем непосредственное измерение двугранного угла заменить нахождением угла между перпендикулярами к плоскостям, образующим двугранный угол. Из этого вытекает один из возможных спо-

собов решения поставленной задачи. Этот способ состоит в нахождении линейных проекций двух направлений, перпендикулярных к двум данным плоскостям, изображенным в линейной проекции линиями a_1p и a_2p и определении угла между двумя направлениями, проекции которых даны. Способ нахождения проекции перпендикуляра к плоскости, изображенной в линейной проекции некоторой прямой, нам уже известен из предыдущих задач. Точно также в задаче 1 дан способ нахождения угла между двумя направлениями, изображенными в линейной проекции двумя точками. В виду этого, мы считаем излишним приводить здесь полностью решение задачи по этому способу и ограничимся только приведенными выше общими соображениями.

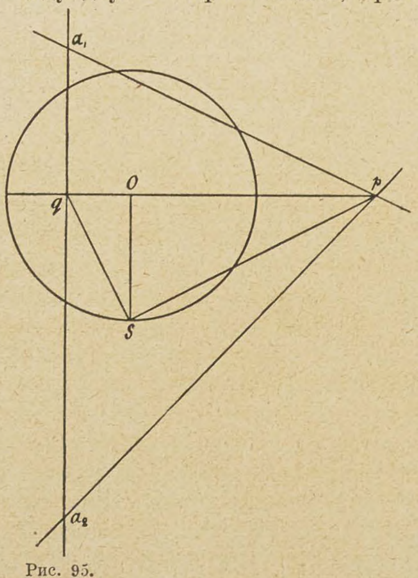


Рис. 95.

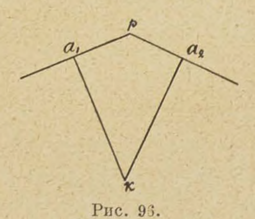


Рис. 96.

B) Кроме этого способа решения задачи мы можем применять еще и другой, дающий непосредственное определение двугранного угла, образуемого двумя данными плоскостями. Этот способ основан на следующих соображениях. Если (рис. 95) две линии a_1p и a_2p представляют собою линейные проекции двух плоскостей пучка, то точка p пересечения этих линий будет линейной проекцией ребра пересечения двух данных плоскостей. Для нахождения двугранного угла между данными плоскостями мы можем построить проекцию плоскости, перпендикулярной к направлению, представленному

в линейной проекции точкой p. Эта проекция плоскости, перпендикулярной к направлению p, пересечется с линиями a_2p и a_1p в точках a_1 и a_2, причем эти точки будут линейными проекциями направлений, образующих угол, равный искомому двугранному углу.

Решение задачи. (рис. 95). pa_1 и pa_2 — данные прямые, пересекающиеся между собой в точке p. Соединяем p с центром O и проводим радиус OS, перпендикулярный Op. Соединив точки S и p прямой Sp и приняв S за вершину, строим прямой угол pSq. Точка q пересечения линий Sq и pO будет линейной проекцией перпендикуляра к ребру, изображенному точкой p. Этот перпендикуляр находится в плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа, и пересекает линию, изображенную точкой p в центре пучка. Через точку q проводим прямую a_1a_2, перпендикулярную диаметру pO. Точки a_1 и a_2 пересечения этой прямой с линиями pa_1 и pa_2 будут линейными проекциями направлений, образующих между собою угол, равный искомому двугранному углу. Определив этот угол по способу, изложенному в задаче 1, находим искомый угол между гранями, изображенными в линейной проекции линиями pa_1 и pa_2.

Задача 4. *Найти линейные проекции всех направлений, находящихся на угловом расстоянии α от данного направления, изображенного в линейной проекции точкой a.*

Общие соображения. Направления, образующие некоторый данный угол с определенным направлением в пространстве, дадут в своей совокупности поверхность прямого круглого конуса, для которого данное направление будет служить осью. Такая коническая поверхность будет иметь центр (вершину) в центре пучка и пересечется с плоскостью чертежа по одному из конических сечений. Геометрическим местом точек, представляющих проекции прямых, находящихся на определенном угловом расстоянии от точки a, будет одна из следующих кривых: 1) круг, 2) парабола, 3) гипербола или 4) эллипс.

1) Если линейная проекция данного направления, точка a, совпадает с центром проекции O, то геометрическим местом точек, находящихся от a на угловом расстоянии α, будет круг.

2) Если одна из производящих конической поверхности будет параллельна плоскости чертежа, то геометрическим местом точек будет парабола. В этом случае, сумма двух углов, а именно угла β — данного направления с нормалью к плоскости чертежа и угла α должна равняться 90^0.

3) Если две производящие конической поверхности будут параллельны плоскости чертежа, то геометрическим местом точек будет служить гипербола. В этом случае, сумма двух углов: угла β, образуемого данным направлением с нормалью к плоскости чертежа и угла α будет больше 90^0, причем точка a вообще будет находиться на определенном конечном расстоянии от центра O проекции, но в частном случае, может быть также и в бесконечности.

4) Если плоскость чертежа пересекает все производящие конической поверхности, то геометрическим местом точек будет эллипс. В этом случае $\angle \beta + \angle \alpha < 90^0$.

Как известно, для построения кривой второго порядка, какими являются эллипс, гипербола и парабола, необходимо иметь 5 точек соответственной кривой. Однако, количество точек уменьшается до 3-х, если даны точки особого положения, как напр. в том случае, если даны точки, лежащие на концах малой или большой оси эллипса и еще одна какая-нибудь точка этой кривой. При наших построениях мы всегда можем найти точки, лежащие в вершинах кривой, так как вершины кривой будут находиться на линии, соединяющей центр проекции с данной точкой a. На основании этих соображений, решение поставленной задачи сводится к решению двух вопросов:

1) Найти проекцию направления, наклоненного под углом α к данному направлению, изображенному в линейной проекции точкой a и находящемуся в определенной плоскости, изображенной в линейной проекции некоторой прямой, проходящей через точку a.

2) Построить кривую второго порядка по следующим данным: a) по большой оси и одной из точек этой кривой (в случае эллипса); b) по вершине и двум точкам (в случае параболы); c) по вершинам, центру и трем точкам или ассимптотам кривой (в случае гиперболы).

Разрешение первого вопроса может быть произведено построением, аналогичным построению, описанному в зад. 1. Для построения кривой второго порядка, мы можем воспользоваться одним из способов построений, употребляемых при вычерчивании кривых по данным точкам. Рассмотрим сначала решение задачи в случае эллипса, затем параболы и, наконец, гиперболы,

1) Решение задачи. (Эллипс). Через точку a (рис. 97) — линейную проекцию данного направления — проводим две линии: 1) aO, проходящую через центр проекции O и через точку a и 2) kl произвольного направления, также проходящую через точку a. Проводим радиус OS, перпендикулярный к On. Соединяем точки a и S прямой aS и по обе стороны этой прямой, при точке S, как вершине, откладываем углы $\angle mSa = \angle aSn = \alpha$. Отмечаем точки m и n пересечения линий On, Sm и Sn; mn — большая ось искомого эллипса.

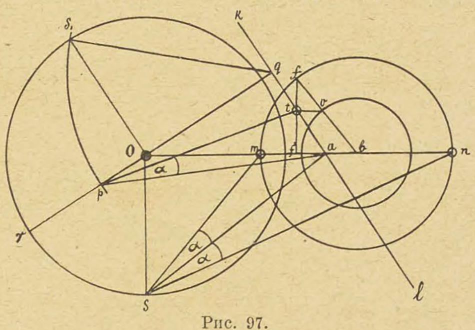


Рис. 97.

Разделив mn пополам, находим b — центр эллипса и описываем большую окружность эллипса радиусом $mb = bn$. Из центра O опускаем перпендикуляр Oq на линию kl и проводим радиус OS_1, параллельный этой линии. Соединив точки q и S_1, и приняв q за центр, описываем дугу радиусом qS_1. Точку p пересечения этой дуги с линией rq соединяем с точкой a, и от линии ap, приняв p за вершину, откладываем угол $apt = \alpha$. Точка t пересечения стороны pt этого угла с линией kl даст еще одну точку искомого эллипса. Опускаем из точки t перпендикуляр tf_1 на линию mn и продолжаем этот перпендикуляр до пересечения с окружностью большого круга эллипса в точке f. Соединяем точку f и центр эллипса прямой fb. Из точки t проводим прямую tv, параллельную mn. Находим bv — радиус малого круга, искомого

эллипса, равный его малой полуоси. Построение искомого эллипса после нахождения его двух осей уже не представляет никакого затруднения.

2) Решение задачи. (Парабола). В случае, если одно из направлений, образующих угол α с данным, параллельно плоскости проекции, то на плоскости чертежа мы получаем параболу, как геометрическое место точек, представляющих линейные проекции прямых, находящихся на угловом расстоянии α от данного направления, проектирующегося точкой a. В этом случае точка a находится в плоскости чертежа на конечном расстоянии от центра проекции O.

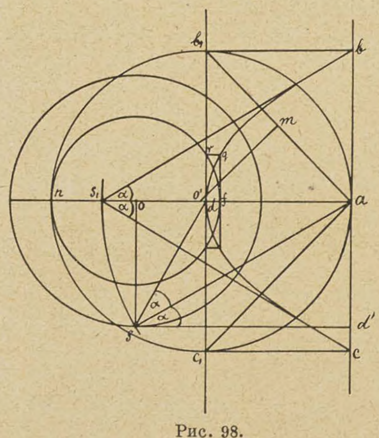


Рис. 98.

Через данную точку a (рис. 98) проводим диаметр Oa и перпендикулярный к нему радиус OS. Соединяем S и a прямой и откладываем от этой прямой, приняв S за вершину, по обе стороны aS углы $dSa = d'Sa = \alpha$.

По самому условию получая параболы Sd' параллельна Oa. Точка d — является вершиной искомой параболы. Проводим через точку a прямую bc, перпендикулярную диаметру Oa. Радиусом aS, приняв a за центр, проводим дугу SS_1, пересекающую диаметр Oa в точке S_1. От диаметра Oa, приняв S_1 за вершину, откладываем по обе стороны углы $\angle bS_1a = \angle aS_1c = \alpha$. Точки пересечения b и c сторон этих углов с линией bc будут находиться на искомой параболе и будут расположены симметрично по отношению к оси симметрии параболы.

Проведя bb_1 и cc_1 параллельно Oa до пересечения с линией b_1c_1, касательной к параболе в ее вершине, найдем точки b_1 и c_1, как две вершины равнобедренного треугольника ab_1c_1, вписанного в один из вспомогательных кругов, слу-

жащих для построения параболы. Центры этих кругов находятся на оси симметрии параболы, т. е. на диаметре Oa. Для определения положения центра вспомогательного круга, проходящего через точки a, b_1 и c_1, соединяем точки a и b_1 прямой ab_1 и из средины m этой прямой восставляем перпендикуляр mO' до пересечения с диаметром Oa в точке O', которая и будет центром вспомогательного круга, проходящего через точки a, b_1 и c_1. Приняв O' за центр, описываем окружность радиусом $O'a$, причем точка n пересечения этой окружности с диаметром Oa будет общей точкой для всех вспомогательных кругов, служащих для построения искомой параболы по точкам, принадлежащим ей. Для такого построения берем отрезок nO прямой, причем величина этого отрезка должна быть больше $\frac{nd}{2}$. От точки n откладываем взятый отрезок по диаметру na. Находим точку O. Приняв эту точку за центр, проводим радиусом nO окружность nrf. Из точки r пересечения этой окружности с линией b_1c_1 проводим rq параллельно Oa, а из точки f пересечения той же окружности с диаметром Oa проводим линию fq, параллельную b_1c_1. Точка q пересечения линий rq и fq будет принадлежать искомой параболе. Изменяя радиус nO так, чтобы он постоянно был больше $\frac{nd}{2}$ найдем ряд точек, принадлежащих искомой параболе, по которым и делаем построение этой кривой, изображенной на чертеже (рис. 98).

3) Решение задачи. (Гипербола, общий случай). Положим a — линейная проекция данного направления (рис. 99). Проводим прямую Oa через точку a и центр проекции O. Восставляем перпендикуляр OS из точки O к линии Oa. Соединяем прямой aS точку a и точку S пересечения перпендикуляра OS с кругом проекции. Приняв точку S за вершину, строим по обеим сторонам от линии Sa углы α, стороны которых пересекают линию Oa в точках n и m. Восставляем перпендикуляры dd_1 и qq_1 к линии Oa в точках n и a. Из точки a восставляем перпендикуляр al к линии aS. Откладываем на qq_1 отрезки $aq = aq_1 = al$. Точки m и n будут вершинами искомой гиперболы, а точки q и q_1 будут также принадлежать той же гиперболе. Для построения этой кривой, делим пополам отрезок mn и находим O_1 — центр ги-

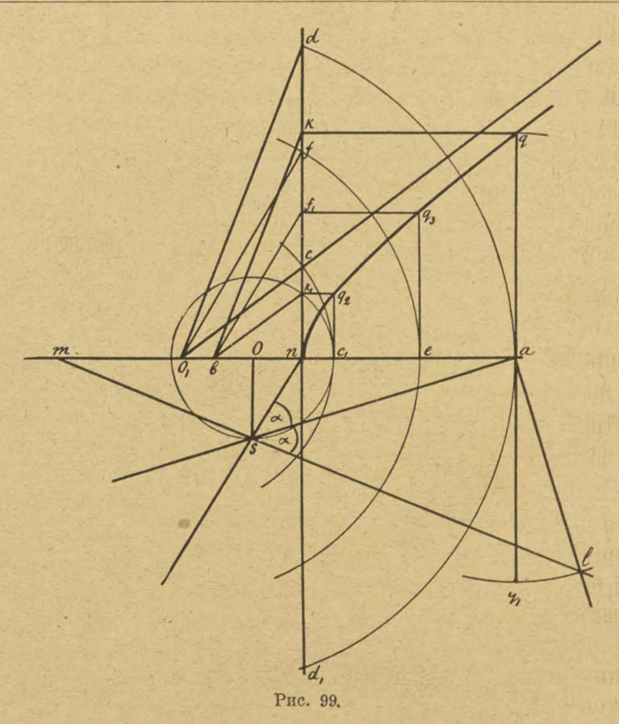


Рис. 99.

перболы. Проводим окружность радиусом O_1a, приняв за ее центр точку O_1. Находим точки d и d_1 пересечения этой окружности с перпендикуляром nd. Проводим прямую O_1d, а из точки q проводим прямую $qk \parallel Oa$. Проведя $kb \parallel O_1d$, находим точку b, причем nb будет равна длине мнимой полуоси гиперболы. Отложив $nc = bn$, находим O_1c — ассимптоту гиперболы. Теперь у нас уже имеются все данные для построения какой угодно точки гиперболы.

Из точки b проводим прямую $bk_1 \parallel O_1c$; проводим $k_1q_2 \parallel Oa$ и откладываем $Oc_1 = Oc$. Проводим $c_1q_2 \parallel k_1n$; получаем точку q_2, находящуюся на гиперболе. Берем произвольную точку e между точками n и a прямой na. Проводим $eq_3 \parallel dn$. Приняв O_1 за центр и O_1e за радиус, проводим дугу круга, пересекающую nd в точке f. Соединяем прямой O_1 и f. Из точ-

ки b проводим $bf_1 \parallel O_1f$. Через точку f_1 проводим прямую $f_1q_3 \parallel Oa$. Точка q_3 пересечения построенных нами прямых eq_3 и f_1q_3 будет принадлежать искомой гиперболе. Так как при нахождении точки q_3 была взята совершенно произвольная точка e, то ясно, что мы можем теперь построить все точки гиперболы, поступая совершенно так же, как и для нахождения точки q_3.

4) Решение задачи. (Гипербола, частный случай). Если точка a находится в бесконечности, то центром искомой гиперболы будет центр проекции O. (рис. 100). Данный

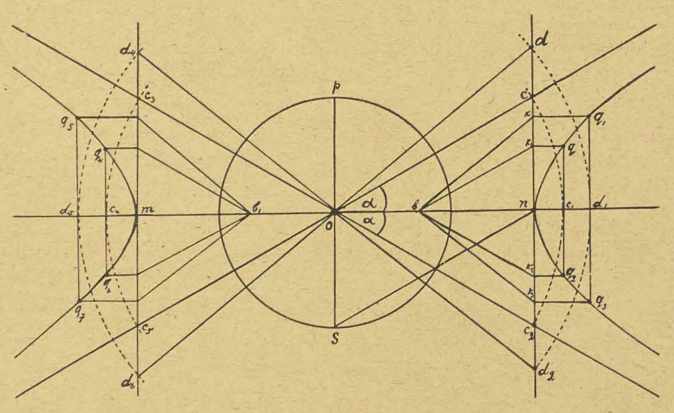


Рис. 100.

угол α будет равен половине угла между ассимптотами гиперболы. Так как нам известно направление линии, проектируемой точкой a в бесконечности, то на плоскости проекций проводим центральную секущую mn, параллельную направлению данной линии. Откладываем по обе стороны от этой секущей, принимая O за вершину, углы $cOn = c_2On = \alpha$. Получаем ассимптоты искомой гиперболы — линии Oc и Oc_2. Проводим радиус OS, перпендикулярный On. Проведя через S линию Sn, параллельную Oc, получаем точку n пересечения этой линии с секущей mn. Точка n является вершиной гиперболы.

Линия mn будет секущей осью искомой гиперболы, причем длина этой оси равна отрезку $mn = 2\ On$. Диаметр pS будет служить сопряженной осью той же гиперболы, причем длина этой оси будет равна длине диаметра pS круга проекций.

Для построения гиперболы откладываем по секущей оси mn отрезки $nb = mb_1 = nc = Op$. Проводим nc перпендикулярно On. Приняв O за центр, проводим дугу dd_1d_2 произвольного радиуса Od, причем d и d_2 — точки пересечения этой дуги с перпендикуляром к линии On, восставленным в точке n, а d_1 — точка пересечения той же дуги с секущей осью mn. Проводим bk параллельно Od. Из точки k проводим kq_1, параллельную On. Из точки d_1 проводим прямую d_1q_1 параллельную dd_2. Точка q_1 пересечения этих двух прямых будет принадлежать искомой гиперболе. Изменяя длину радиуса Od, найдем другие точки гиперболы, которую и строим, соединяя найденные точки.

Такое решение задачи основано на том, что угол между асимптотами гиперболы равен углу между двумя производящими прямого круглого конуса, находящимися в плоскости, проведенной через центр конуса и его ось.

7. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНОЙ И ГНОМОНИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЙ.

При решении последней из приведенных выше задач (4) нам пришлось иметь дело с построением различных кривых второго порядка. Можно было бы подобрать еще целый ряд задач, графическое решение которых в линейной и гномонической проекциях связано с построением кривых второго порядка, причем все такие задачи касались бы вопросов, обычно решаемых графическим путем при помощи проекций.

Принимая во внимание, что построение кривых второго порядка технически выполнимо с гораздо большими затруднениями, чем проведение прямых линий и кругов, мы определенно должны отнести необходимость таких построений к недостаткам линейной и гномонической проекций. Этого недостатка уже никак нельзя избежать по самым свойствам

данного вида проекций, а потому, поставив себе целью при решении различных задач обходиться без помощи построений кривых второго порядка, мы должны прежде всего изменить самый метод проектирования и найти такой вид проекций, пользуясь которыми мы можем решать все задачи, ограничиваясь проведением прямых и кругов.

Этому условию удовлетворяют стереографические проекции, получившие свое название от греческих слов *στέρεος* — твердый и *γράφω* — пишу (т. е. изображение твердого тела на плоскости.)

Эти проекции были изобретены Гиппархом (180—125 г. г. до Р. Х.), а затем их главные свойства были открыты и изучены Птоломеем (87—165 г. г).

8. ПОЛУЧЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО МНОГОГРАННИКА В СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ.

Существуют две стереографические проекции: граммастереографическая и гномостереографическая. Различие между этими двумя проекциями совершенно аналогично различию между линейной и гномонической проекциями.

В граммастереографической проекции изображается тот пучек граней и ребер, в который мы можем непосредственно преобразовать данный кристаллический многогранник путем параллельного перемещения его граней и ребер до пересечения их в одной точке — центре пучка.

В гномостереографической проекции изображается пучек полярный тому, которым мы пользуемся для получения изображения кристаллического многогранника в граммастереографической проекции.

Способ построения стереографической проекции пучка совершенно тождествен, будем ли мы иметь дело с пучком, полученным непосредственно из данного кристаллического многогранника (при изображении в граммастереографической проекции), или с пучком, полярным первому (при изображении в гномостереографической проекции).

Для получения граммастереографической проекции мы принимаем центр пучка граней и ребер за центр шара определенного радиуса и описываем вокруг этого центра шаровую поверхность. Все грани пучка, как плоскости, проходящие через центр шара, пересекутся с шаровой поверхностью по дугам больших кругов, а каждое ребро пучка пересечется с поверхностью шара в двух точках. Таким образом, на поверхности шара мы получим систему больших кругов и точек, причем каждый круг будет соответствовать одной из граней пучка, а каждые две диаметрально противоположные точки будут соответствовать одному из ребер того же пучка.

Для получения стереографической проекции пучка необходимо получить на некоторой плоскости изображение точек и дуг больших кругов, полученных нами на шаровой поверхности. Для этого принимаем за плоскость для получения проекций, одну из диаметральных плоскостей шара, которую и будем называть плоскостью проекций. Эта плоскость проекций пересечет шаровую поверхность по окружности большого круга, которую мы и назовем основным кругом проекций. Выбрав плоскость проекций, отмечаем точку зрения (пересечения лучей), которая лежит под плоскостью проекций и представляет собою точку пересечения с шаровой поверхностью нижнего конца перпендикуляра, восставленного из центра шара к плоскости проекций.

Для получения на плоскости проекций изображения системы точек и больших кругов, находящихся на поверхности шара, соединяем прямой линией каждую точку такой системы с точкой зрения. Такие прямые пересекут плоскость проекций и точки их пересечения с этой плоскостью будут стереографическими проекциями ребер и граней пучка. Из только что описанного способа получения стереографической проекции ясно, что все точки и дуги полусферы, находящейся выше плоскости проекций, изобразятся точками и некоторыми кривыми, находящимися внутри основного круга проекций, а все точки нижней полусферы изобразятся в стереографической проекции вне основного круга проекций.

9. ОБЩИЕ СВОЙСТВА СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ.

Стереографические проекции обладают совершенно особыми, только им одним присущими, свойствами, которые являются чрезвычайно ценнымы и удобными для практических целей, при решении различных задач кристаллографии графическим путем. Эти свойства могут быть выражены двумя основными положениями.

1) Круг на шаровой поверхности изобразится кругом и на плоскости проекций.

2) Угол между двумя дугами больших кругов на шаре будет равен углу между дугами кругов, изображающих данные дуги в стереографической проекции.

Оба эти положения представляют собою основные теоремы, из которых и выводятся все свойства стереографических проекций и методы их практического применения.

Прежде чем приступить к доказательству этих теорем, нам необходимо будет установить некоторые общие положения, на основании которых вывод и доказательство основных теорем стереографических проекций получает особенную простоту и систематичность.

Общие и чрезычайно важные для практических целей кристаллографического исследования свойства стереографической проекции могут быть выведены из рассмотрения симметрии косого круглого конуса. Однако, прежде чем рассматривать эту симметрию, будет весьма полезно привести некоторые общие соображения относительно тех свойств окружностей, на которые в учебниках элементарной геометрии не обращается достаточного внимания. Для этого нам, прежде всего, придется несколько изменить самое определение круга, сравнительно с обычным. Мы и остановимся прежде всего на таком определении.

Если принять некоторую прямую за гипотенузу и построить на этой гипотенузе всевозможные прямоугольные треугольники, не выходя, однако, из пределов данной плоскости, то вершины прямых углов совокупности таких треугольников расположатся по некоторой кривой линии. Полу-

ченная таким образом кривая называется кругом. Таким образом, круг есть кривая на плоскости, образуемая вершинами всевозможных прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу и различные катеты. Общая для всех прямоугольных треугольников гипотенуза называется диаметром круга, а ее средняя точка центром круга.

Круг обладает осью вращения, проходящею через его центр и перпендикулярною к плоскости круга. Благодаря этому, вся система прямоугольных треугольников, образующих своими вершинами окружность, может вращаться в плоскости круга на какой угодно угол без изменения положения и вида кривой на плоскости. При таком вращении будет вращаться также и диаметр круга, постоянно оставаясь диаметром, откуда мы и заключаем, что каждый круг обладает бесконечным числом диаметров, пересекающихся в центре. Каждый диаметр делит окружность на две равные части и может быть, следовательно, определен, как линия пересечения плоскости симметрии круга, перпендикулярной к плоскости фигуры с этой последней плоскостью.

Так как перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы, а каждая точка окружности есть вершина прямого угла треугольника, причем его гипотенузой будет служить один из диаметров круга, то мы можем вывести заключение, что половина хорды есть средняя пропорциональная между отрезками, образуемыми этой хордой на перпендикулярном к ней диаметре.

Из этих общих и элементарных положений мы можем вывести заключение о том, что всякая кривая на плоскости, обладающая плоскостью симметрии, не лежащей в плоскости данной кривой, будет кругом, если только перпендикуляр, опущенный из какой угодно точки данной кривой на линию пересечения плоскости симметрии с плоскостью кривой, будет средней пропорциональной между отрезками линии пересечения, образуемыми данным перпендикуляром.

Запасшись этими сведениями об особенностях и общих свойствах круга, перейдем к рассмотрению симметрии косого круглого конуса.

10. ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О СИММЕТРИИ КОСОГО КРУГЛОГО КОНУСА.

Конической поверхностью называется такая поверхность, которая образуется движением прямой линии, имеющей одну неподвижную точку, причем все другие точки такой прямой скользят по некоторым замкнутым кривым линиям. Неподвижная точка конической поверхности называется центром этой поверхности, а вращающаяся линия — производящею (образующею).

Из самого определения конической поверхности ясно, что эта поверхность представляет собою, в общем случае, незамкнутую пространственную фигуру. Это будет поверхность о двух полостях, образующая, так называемый, двойной конус. Мы можем отбросить один из конусов, составляющих такой двойной конус, и рассматривать свойства только одного конуса, приняв во внимание, что свойства нижнего конуса будут вполне аналогичны свойствам верхнего. Здесь мы рассмотрим только симметрию косого круглого конуса, симметрические свойства которого необходимо исследовать для вывода основных свойств и особенностей стереографических проекций.

Возьмем на плоскости MN некоторый круг (рис. 101) с центром O. Через точку O', находящуюся вне плоскости MN и не лежащую на перпендикуляре OC, восставленном из точки O к плоскости MN, проведем прямую $O'm$, проходящую через точку a окружности ab, построенной на плоскости MN. Приняв точку O' за неподвижную точку линии $O'm$, будем передвигать линию $O'm$ так,

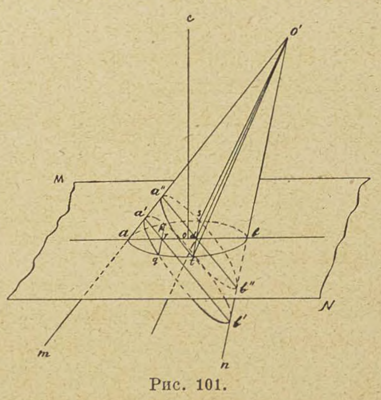


Рис. 101.

чтобы эта линия все время проходила через одну из точек окружности ab. Образовавшаяся, в результате движения по

кругу ab прямой $O'm$, поверхность $O'ab$, будет называться косым круглым конусом.

Все сечения такого конуса плоскостями, параллельными плоскости MN (и не проходящими через точку O'), будут подобны сечению этой плоскостью, т. е. будут кругами. Таким образом, в косом круглом конусе мы имеем одну группу круговых сечений, образуемых параллельными плоскостями, в которую и войдет сечение ab.

Проведем через точку O' и перпендикуляр Oc к плоскости кругового сечения ab плоскость $O'ab$. Эта плоскость будет, по построению, перпендикулярна к плоскости MN. Кроме того, та же плоскость $O'ab$ разделит коническую поверхность на две равные половины, из которых одна будет зеркальным изображением другой. Из этого мы заключаем, что плоскость $O'ab$ будет плоскостью симметрии косого круглого конуса. Возьмем точку a' на производящей Oa конуса, лежащей в его плоскости симметрии, причем выберем точку a' так, чтобы она находилась между точками O' и a прямой $O'm$. Проведем в плоскости симметрии $O'ab$ конуса линию $a'b'$ так, чтобы $\angle O'a'b' = \angle O'ba$, и проведем через эту линию плоскость $a'pqb'$. Эта плоскость пересечет плоскость круга ab по линии pq, а коническую поверхность по некоторой замкнутой кривой $a'pqb'$. В плоскости симметрии $aO'b$ мы получим теперь два треугольника $O'ab$ и $O'a'b'$, которые имеют один угол при вершине O' общий, а два других — равные по построению, а именно $\angle O'a'b' = \angle O'ba$. Ввиду этого, мы заключаем о подобии треугольников $O'a'b'$ и Oab. Точно также легко вывести из равенства углов $\angle a'ra = \angle brb'$ и $\angle aa'r = \angle b'br$ (как дополнительные до 180^0 к равным по построению углам) заключение о подобии треугольников $a'ra$ и brb'. Из подобия этих треугольников находим:

$$\frac{a'r}{br} = \frac{ar}{b'r} \quad \text{или} \quad a'r \cdot b'r = ar \cdot br. \qquad (1)$$

Так как линия pq есть некоторая хорда круга $abpq$, а линия ab — перпендикулярный к этой хорде диаметр, то

$$pr^2 = ar \cdot br. \qquad (2)$$

Сравнивая между собой равенства (1) и (2), находим $pr^2 = a'r \cdot b'r$. Из этого последнего равенства заключаем, что линия pr есть средняя пропорциональная между отрезками $a'r$ и $b'r$. В виду того, что точка a' была взята на линии $O'm$ в произвольном расстоянии от O', мы можем вывести заключение о том, что такая же пропорциональность будет существовать и для всех перпендикуляров, опущенных из точек кривой $a'qb'p$ на линию $a'b'$, т. е. кривая $a'qb'p$ будет удовлетворять всем данным для характеристики круга, или, другими словами, замкнутая кривая $a'qb'p$ будет окружностью.

Из этого мы заключаем, что в косом круглом конусе имеется вторая группа круговых сечений, наклоненных к производящей $O'm$, лежащей в плоскости симметрии конуса, под тем же углом, какой образует первая группа круговых сечений с производящей $O'n$.

Отложим на производящей $O'm$, лежащей в плоскости симметрии конуса, отрезок $O'a''$, взяв $O'a'' = O'b$, а на производящей $O'n$, лежащей также в плоскости симметрии, отрезок $O'b'' = O'a$, и соединим прямой точки a'' и b''. Сделав такое построение, получаем в плоскости симметрии конуса два треугольника $O'ab$ и $O'a''b''$, у которых угол при вершине O' общий, а стороны $O'b = O'a''$ и $O'a = O'b''$ по построению. На основании этого заключаем о равенстве треугольников $O'ab$ и $O'a''b''$, а также и о равенствах углов $\angle O'a''b'' = \angle O'ba$ и $\angle O'b''a'' = \angle O'ab$. Кроме того, вследствие равенства aa'' и bb'', заключаем о равенстве $da'' = db$, а также о равенстве $ad = db''$.

На основании этих равенств, проведя прямую $O'd$, заключаем о равенстве углов $\angle dO'a'' = \angle dO'b$. Приняв линию $O'd$ за ось вращения конуса, мы увидим, что при повороте вокруг этой оси на 360^0 конус 2 раза совместится с своим первоначальным положением, причем линии $a''d$ и $b''d$ будут совмещаться с равными им линиями bd и ad. Из этого заключаем о том, что $O'd$ представляет из себя двойную ось симметрии косого круглого конуса. Так как эта двойная ось симметрии находится в плоскости симметрии косого круглого конуса, то, как равнодействующий элемент симметрии,

мы выведем плоскость симметрии $O's t$, перпендикулярную к первоначально найденной нами плоскости симметрии $O'ab$. Таким образом, косой круглый конус обладает двумя плоскостями симметрии, пересекающимися между собой в оси конуса, которая является двойной осью симметрии, и, следовательно, эта фигура по своей симметрии относится к ромбопирамидальному виду.

Резюмируя все, сказанное выше, мы можем вывести следующее заключение относительно общих свойств косых круглых конусов.

Каждый косой круглый конус имеет две группы круговых сечений, другими словами, через каждую точку оси косого круглого конуса можно провести два, не параллельных друг другу, круговых сечения. Оба эти сечения будут наклонены под одинаковыми углами к оси симметрии конуса, и будут пересекаться друг с другом по линии, лежащей в одной из плоскостей симметрии косого круглого конуса, причем другая плоскость симметрии будет перпендикулярна к плоскостям обоих круговых сечений. Каждое круговое сечение одной и той же группы будет образовывать с одной из двух производящих конуса, расположенных в перпендикулярной к данному круговому сечению плоскости симметрии, определенный угол, равный углу, образуемому круговым сечением другой группы с второй производящей, расположенной в той же плоскости симметрии косого круглого конуса.

11. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ.

Первая основная теорема стереографических проекций может быть формулирована таким образом:

Круг на шаре изображается кругом и в стереографической проекции.

1. Доказательство, основанное на свойстве косого круглого конуса.

Положим, на поверхности сферы нам дана некоторая точка P (рис. 102), которая является сферическим центром неко-

торого круга ab на поверхности шара. Для изображения этого круга в стереографической проекции, мы должны соединить все точки проектируемой окружности ab с точкой зрения S. В результате такого построения получим, в общем случае, косой круглый конус Sab с круговым сечением ab, вершиной S и осью PS. Проекцией круга ab будет служить некоторое сечение построенного конуса Sab с плоскостью проекции MN. Проведем через точки S, P и центр шара O плоскость, которая, в виду своего прохождения через центр шара, пересечет сферу по дуге большого круга $PMSN$.

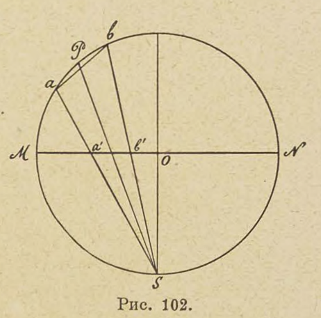


Рис. 102.

Эта плоскость, будучи перпендикулярна к круговому сечению конуса, и проходя через вершину S, будет плоскостью симметрии косого круглого конуса Sab. Из рассмотрения симметрических свойств косого круглого конуса, мы знаем, что положение группы круговых сечений может быть определено углом наклона данного кругового сечения к одной из производящих конуса, лежащих в плоскости симметрии, перпендикулярной к плоскости кругового сечения. Таким образом, положение одной группы круговых сечений, к которой принадлежит сечение ab, может быть определено углом abS по отношению к производящей Sb. Заметим, что этот угол, как имеющий вершину на окружности, измеряется половиною дуги, заключенной между его сторонами:

$$\angle abS = \frac{\smile aM + \smile MS}{2} = \frac{\smile aM + \frac{\pi}{2}}{2},$$

так как $\smile MS = \frac{\pi}{2}$, что ясно из чертежа.

Вторая группа круговых сечений, на основании доказанных выше симметрических свойств косого круглого конуса, определится углом наклона, равным углу abS по отношению к производящей Sa. Так как, угол $Na'S$ есть угол, имеющий вершину внутри круга, то, по известной теореме элемен-

тарной геометрии, он измеряется полусуммою дуг, заключенных между его сторонами и продолжениями их:

$$\angle Na'S = \frac{\smile aM + \smile NS}{2} = \frac{\smile aM + \frac{\pi}{2}}{2},$$

так как $\smile NS = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом мы находим, что $\angle abS = \angle Na'S$ и, следовательно, сечение построенного нами косого круглого конуса плоскостью проекций будет относиться к другой группе круговых сечений, т. е. будет кругом.

Итак, мы доказали требуемое. Заметим, что в виду того, что точки P и S были взяты на сфере совершенно произвольно, мы можем вывести заключение, что тот же самый вывод получится и для больших кругов на шаре — они также изобразятся кругами в стереографической проекции.

2. Доказательство.

Проведем на шаре (рис. 103) круг диаметра ab, и соединим все точки этого круга с точкой зрения s. При таком построении получим конус с вершиной в точке c и с круговым сечением ab. Пересечем шар плоскостью, проходящею через центр шара O, точку зрения s и центр круга ab. В сечении построенного конуса этой плоскостью получим треугольник abc. Сечение плоскости проекций с конусом даст в построенной плоскости линию mn. Проведем pq ab, так, чтобы эта линия пересеклась с линией mn в некоторой, произвольно выбранной, точке r. По построению имеем: $\angle abs = \angle pqc$ и $\angle bas = \angle qps$. Угол abs, имеющий вершину на окружности, измеряется половиною дуги $\smile as = \smile aM + \smile Ms = \smile aM + \frac{\pi}{2}$. Таким образом, величина угла abc равна

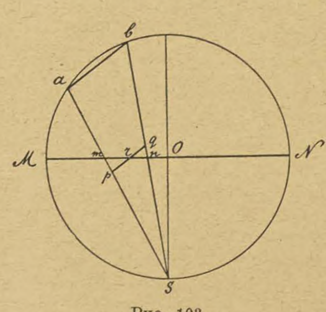


Рис. 103.

$\frac{2 \cdot \smile aM + \pi}{4}$. Угол Nms, как имеющий вершину внутри круга, измеряется полусуммой дуг, заключающихся между его сторонами, т. е. величина угла Nms равна $\frac{\smile aM}{2} + \frac{\smile Ns}{2} = \frac{2 \cdot \smile aM + \pi}{4}$. Из этого рассуждения заключаем о равенстве углов abs и Nms.

Так как в треугольниках mrp и qrn углы mrp и qrn равны, как вертикальные, а $\angle pqs = \angle abs = \angle Nms = \angle rmp$, по только что доказанному, то мы заключаем о подобии треугольников mrp и qrn. Так как в подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны, то мы имеем: $\frac{pr}{rn} = \frac{mr}{rq}$, или $pr \cdot rq = mr \cdot rn$. В виду того, что ab есть диаметр кругового сечения косого круглого конуса, то и всякое сечение этого конуса плоскостью, параллельною кругу ab, даст также круг. Таким образом, сечение pq, того же конуса, также круговое и pq является диаметром этого круга. Восставив из точки r этого диаметра перпендикуляр и продолжив этот перпендикуляр до пересечения с окружностью в точке c (рис. 104), найдем $rc^2 = pr \cdot rq$.

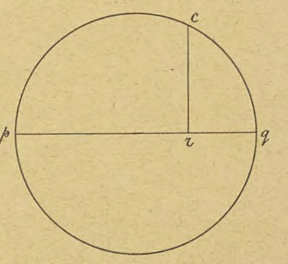


Рис. 104.

Это последнее соотношение получается на основании известной теоремы о том, что перпендикуляр, опущенный из произвольно взятой точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная между отрезками диаметра. Так как $pr \cdot rq = mr \cdot rn$, то $rc^2 = mr \cdot rn$.

Заметим, что перпендикуляр rc представляет собою линию пересечения двух сечений конуса, а именно сечения mn и pq. Передвигая сечение pq параллельно самому себе, мы можем для любой точки кривой пересечения поверхности конуса abs плоскостью mn найти то же самое отношение, $rc^2 = mr \cdot rn$, так как точка r была взята совершенно произвольно. Из этого мы заключаем, что и сечение mn будет также обладать тем свойством, которым обладает только окружность, и, следовательно, будет круговым сечением.

12. ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫВОДЯЩИЕСЯ ИЗ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ.

Положим, что плоскость проекций перпендикулярна к плоскости чертежа (рис. 105) и пересекается с этой последней по линии MN. Возьмем произвольную плоскость, также перпендикулярную к плоскости чертежа и проходящую через центр шара O. Пусть эта плоскость пересечет плоскость чертежа по линии ab и, в то же время, пересечет поверхность шара по дуге большого круга. Соединяя прямыми линиями все точки этой дуги с точкой зрения s, получим поверхность косого круглого конуса, одно из круговых сечений которого в пересечении с плоскостью чертежа

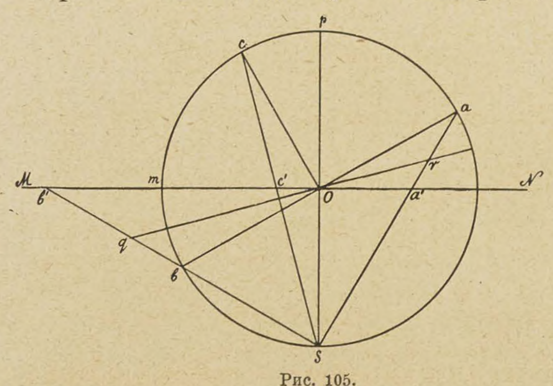


Рис. 105.

(рис. 105) даст две точки, a и b, которым в граммастереографической проекции будут соответствовать точки a' и b'. Остальные точки граммастереографической проекции той же плоскости ab образуют на плоскости проекций второе круговое сечение того же конуса.

Пусть на рис. 105 Oc — направление, перпендикулярное к плоскости кругового сечения ab; cs — линия, проектирующая направление cO на плоскость чертежа; c' — проекция этого направления, называемая полюсом круга $a'b'$.

Положение 1. Линия cs (рис. 105), проектирующая направление cO, служит осью косого круглого конуса asb, одно из круговых сечений которого ab находится в плоскости, перпендикулярной к направлению cO.

Заметим прежде всего, что в случае справедливости этого положения, cs, как ось конуса, должна образовать равные углы с производящими конуса, находящимися в плоскости, проходящей через ось конуса. Одной из таких плоскостей и будет плоскость чертежа (рис. 105), по отношению к косому круглому конусу asb, имеющему одно из круговых сечений в плоскости MN, а другое — в плоскости ab.

На основании построения (рис. 105) мы имеем следующие данные:

$$Oc \perp ab$$
$$ps \perp MN.$$

Требуется доказать, что $\angle csb = \angle csa$.

Так как угол bsa, как опирающийся на диаметр ab, равен прямому, и, кроме того, $\angle bsa = \angle csb + \angle csa$, то при равенстве углов csb и csa каждый из этих углов должен равняться половине прямого, т. е. измеряться дугой в 45^0. Но угол csb, как имеющий вершину на окружности, измеряется половиной дуги cmb, а угол csa измеряется половиной дуги cpa. Обе эти дуги равны между собой, так как каждая из них заключена между сторонами прямого центрального угла.

Эти углы будут: $\angle cOb$ для дуги cmb и $\angle cOa$ для дуги cpa.

В виду этого: $\angle bsc = \angle csa = 45^0$.

Кроме того, принимая во внимание, что плоскость рис. 105 будет одной из плоскостей симметрии косого круглого конуса bsa, заключаем, что линия cs будет осью этого конуса.

Положение 2. Плоскость qr, делящая пополам угол между изображаемой плоскостью и плоскостью проекций, перпендикулярна к оси sc косого круглого конуса bsa (рис. 105).

По условию теоремы $\angle MOq = \angle qOb$.

Требуется доказать, что qr перпендикулярна cs.

Так как по построению Op перпендикуярна MN, а cO перпендикулярна ab, то углы $b'Ob$ и cOp равны между собой, как углы с взаимноперпендикулярными сторонами. Из этого равенства заключаем о равенстве дуг mb и cp. Угол csp равен половине центрального угла cOp, как угол, имеющий вершину на окружности, и опирающийся на ту же дугу cp.

Так как $\angle MOq$ равен половине угла MOb, то заключаем о равенстве углов: $\angle MOq = \angle csO$. В виду перпендукулярности MO и Os заключаем, что cs перпендикулярна qr.

Положение 3. Большие круги на шаре изображаются в стереографической проекции кругами, проходящими через концы одного из диаметров основного круга проекций.

Представим себе (рис. 106) центральный разрез шара $asbp$, перпендикулярный к плоскости проекций.

Пусть прямая ab есть линия пересечения одной из плоскостей проектируемого пучка, перпендикулярных к плоскости чертежа (рис. 106). Проектируемая плоскость пересекает шар по дуге большого круга; этой дуге будут принадлежать точки a и b.

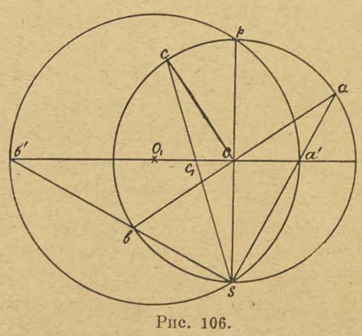


Рис. 106.

Кроме того, на той же дуге большого круга будут находиться две точки пересечения с поверхностью шара перпендикуляра, восставленного в точке O к плоскости рисунка 106. В граммастереографической проекции точка a изобразится точкой a', а точка b — точкой b'.

Приняв $b'a'$ за ось вращения, повернем плоскость проекций на 90^0 вокруг этой оси.

После такого поворота, плоскость проекций совместится с плоскостью чертежа рис. 106, а линия пересечения плоскости ab с плоскостью проекций совпадет с линией sp, причем точки s и p совпадут с точками линий пересечения двух плоскостей, находящимися на сфере.

Таким образом, граммастереографической проекции плоскости ab будут теперь принадлежать точки a', b', s и p. Проведя через эти точки окружность, получаем искомую граммастереографическую проекцию диаметральной плоскости.

Из чертежа ясно, что круг, изображающий данную плоскость ab в граммастереографической проекции, проходит через концы диаметра sp основного круга проекций.

Заметим, что угол asb имеет вершину в точке s пересечения двух кругов $asbp$ и $a'sb'p$ и опирается на диаметр ab круга $asbp$.

Из этого мы заключаем, что угол asb прямой, а линия $a'b'$ служит диаметром круга $a'sb'p$ и, следовательно, центр этого круга будет точка O_1, находящаяся на линии $a'b'$ и делящая ее пополам.

Восставим из точки O перпендикуляр Oc к линии ab.

Соединив s и c прямой sc, получаем точку c_1 — граммастереографическую проекцию направления Oc. В виду того, что Oc перпендикулярна ab, точка c_1 будет гномостереографической проекцией грани ab. По уже известному нам свойству стереографических проекций c_1 будет точкой пересечения оси sc конуса abs с плокостью проекций, и будет находиться на одинаковом угловом расстоянии от всех точек круга $a'b'$, изображающего грань ab в граммастереографической проекции.

В виду того, что угол конуса asb равен 90^0, мы имеем углы между осью конуса sc и его производящими равными 45^0.

Заметим, что в стереографической проекции расстояние c_1a' между двумя точками, находящимися на одном и том же диаметре основного круга проекций, соответствует некоторому углу между направлениями Oc и Oa, проектирующимися в данных точках c_1 и a', причем $\angle a'sc_1 = \frac{\angle aOc}{2}$. Отрезок прямой $a'c_1$, заключенный между сторонами sc_1 и sa' угла $a'sc_1$, будет соответствовать углу coa между проектируемыми направлениями Oc и Oa. Так как $\angle csa = \frac{\angle cOa}{2} = 45^0$, то угол $cOa = 90^0$.

Таким образом точка c_1 будет граммастереографической проекцией направления Oc, находящегося на угловом расстоянии, равном 90^0 от всех точек круга $a'b'$, представляющих собою граммастереографические проекции направлений, лежащих в плоскости ab, перпендикулярной направлению Oc, т. е. направлений, перпендикулярных Oc.

В виду этого, точка c_1 — граммастереографическая проекция направления, перпендикулярного каждому направлению,

проектирующемуся в одной из точек дуги круга $a'b'$, называется полюсом этой дуги.

Положение 4. Угол, между двумя направлениями, представленными точками a_1 и b_1 в граммастереографической проекции, измеряется дугой основного круга проекций a_2b_2, заключенной между прямыми, проведенными через точки a_1 и b_1 из точки c_1 — полюса дуги большого круга, проходящего через данные точки a_1 и b_1.

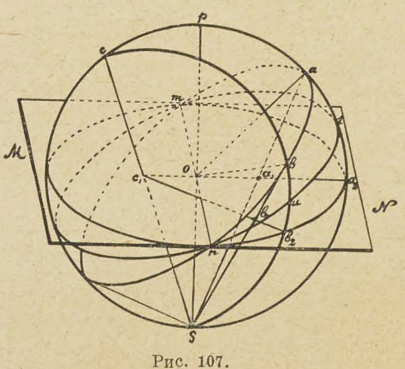


Рис. 107.

Положим, oa и ob — два направления, проходящие через центр o шара (изображенного в перспективе на рис. 107). Как известно, угол между этими направлениями измеряется дугой ab большого круга $nbam$, проходящего через данные направления и определяющего диаметральную плоскость oab шара.

Приняв S за вершину, а большой круг $nbam$ за одно из круговых сечений косого круглого конуса $Snbam$, построим ось Sc этого конуса. Проведем две плоскости через ось Sc конуса и точки a и b. Эти плоскости, изображенные на рис. 107 дугами cbb_2S и caa_2S, пересекутся с плоскостью проекций oa_2b_2NM по прямым c_1a_2 и c_1b_2. Так как точки a и S находятся в плоскости caa_2S, то линия Sa — проектирующий луч для точки a — будет лежать в той же плоскости caa_2S. Точно так же линия bs, проектирующий луч для направления ob, будет лежать в плоскости cbb_2S. В этих же плоскостях будут находиться и граммастереографические проекции a_1 и b_1 данных направлений oa и ob. Кроме того, точки a_1 и b_1 должны лежать на линиях c_1a_2 и c_1b_2, так как a_1 и b_1 являются точками пересечения линий aS и c_1a_2, а также линий bS и c_1b_2.

Проведем плоскость $nutm$, делящую пополам двугранный угол между плоскостями $nbam$ и nb_2a_2m. Так как плоскость

$nutm$ (согласно уже доказанной теореме) перпендикулярна к линии cS, а через эту линию проходят плоскости cbb_2S и caa_2S, то мы заключаем, что плоскость $nutm$ перпендикулярна к обоим плоскостям cbb_2S и caa_2S. Благодаря этому, сферические треугольники nta, nub, nta_2 и nub_2 будут прямоугольными, причем прямые углы находятся при вершинах u и t. Так как вершина n и сторона nt будут общими для двух прямоугольных сферических треугольников nta и nta_2, то мы заключаем о равенстве этих треугольников. На том же основании заключаем о равенстве треугольников nub и nub_2. Из этих равенств непосредственно вытекает равенство дуг na и na_2, а также дуг nb и nb_2.

Таким образом, имеем:

$$na = na_2 \quad (1)$$

$$nb = nb_2 \quad (2)$$

Вычтя из первого (1) равенства второе (2), получаем:

$$na - nb = na_2 - nb_2 \text{ или}$$

$$ab = a_2b_2.$$

Из этого мы видим, что дуга основного круга проекций, заключенная между сторонами угла $a_2c_1b_2$, измеряет собою угол между данными направлениями, изображенными в граммастереографической проекции точками a_1 и b_1.

Из предыдущего рассуждения непосредственно вытекает способ измерения углового расстояния между двумя направлениями, изображенными в граммастереографической проекции точками a_1 и b_1. Для такого измерения мы можем провести через данные точки a_1 и b_1 дугу большого круга, найти полюс c_1 этой дуги и соединить прямыми точку c_1 с данными точками a_1 и b_1. Дуга a_2b_2, заключенная между точками a_2 и b_2 пересечения проведенных прямых c_1a_1 и c_1b_1 с основным кругом проекций, даст искомый угол.

13. ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ.

Вторая основная теорема стереографических проекций может быть формулирована таким образом:

Угол между двумя дугами больших кругов на шаре равен углу между граммастереографическими проекциями изображеных граней.

Положим, (рис. 108) нам даны на шаре две дуги больших кругов, отрезки которых изображены на рисунке двумя кривыми ab и cd.

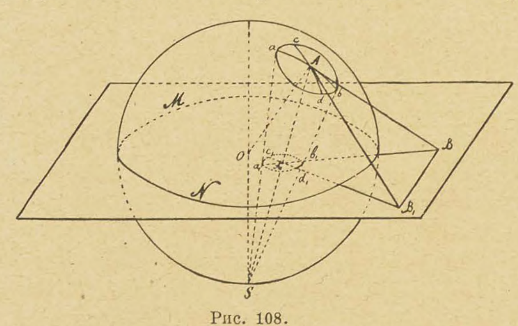


Рис. 108.

Углом между дугами двух пересекающихся кругов называют угол, образуемый касательными к кругам, проведенными через точку их пересечения.

Так как касательные перпендикулярны радиусам, проведенным в точки касания, то угол между двумя пересекающимися кругами будет равен углу между радиусами этих кругов, проведенными в точку их пересечения.

Если мы имеем две пересекающиеся между собой дуги больших кругов на шаре, то обе касательные к таким кругам, проведенные через точку их пересечения, будут находиться в плоскости, касательной к шару, в точке пересечения этих кругов.

Проведем касательные AB и AB_1 к дугам ab и cd в точке их пересечения A. Эти касательные будут лежать в плоскости, касательной к поверхности шара в точке A.

Положим a_1b_1 и c_1d_1 — граммастереографические проекции дуг ab и cd на плоскости проекций MN, а точка A_1 — граммастереографическая проекция радиуса OA шара.

Соединив все точки дуги ab с точкой зрения s, найдем часть поверхности косого круглого конуса, для которого линии as, bs и As будут служить образующими.

Точно таким же построением найдем производящие cs, ds и As другого косого круглого конуса. Оба эти конуса пересекаются в общей производящей As. Проведем плоскости, касательные к каждой из двух конических поверхностей в их общей производящей As.

В каждой из этих плоскостей будут лежать все касательные, проведенные в одну из точек общей образующей As обоих конусов к какому угодно разрезу соответственного конуса.

В частности, в таких плоскостях будут находиться также и касательные к круговым сечениям конусов.

Так как из круговых сечений конуса abs дуга ab будет частью окружности, а другое круговое сечение того же конуса будет находиться в плоскости MN, причем часть этого сечения изображена на рисунке отрезком дуги $a_1 b_1$, то в плоскости ABA_1, касательной к поверхности первого конуса, будут находиться, как касательная к кругу aAb, проведенная через точку A_1, так и касательная к кругу $a_1 A_1 b_1$, проведенная через точку A_1. Продолжим эти касательные до их пересечения в точке B. Находим треугольник AA_1B. Произведя точно такое же построение для касательной к плоскости cds, найдем треугольник AA_1B_1.

Приняв A за центр, опишем на шаре, произвольным радиусом Ab, круг $abcd$, и соединим все точки построенной окружности прямыми с точкой зрения s. Получим третий косой круглый конус с вершиной s и одним из круговых сечений $abcd$. Другое круговое сечение этого конуса будет круг на плоскости чертежа $a_1 b_1 c_1 d_1$.

Заметим, что плоскость, касательная к поверхности шара в точке A, будет параллельна плоскости круга на шаре $abcd$, для которого точка A является сферическим центром. В виду этого, линия AB, лежащая в плоскости, касательной к шару в точке A, будет параллельна линии bk, лежащей в плоскости круга $abcd$ и соединяющей точку b с точкой k — пересечения плоскости круга $abcd$ с линией sA. Из этого

мы заключаем, что $\angle BAA_1 = \angle bks$. Но, по предыдущей теореме мы знаем, что $\angle bks = \angle AA_1B$. Следовательно, $\angle BAA_1 = \angle AA_1B$ и треугольник ABA_1 — будет равнобедренным, причем $AB = A_1B$.

При помощи совершенно такого же рассуждения мы можем доказать, что $\angle B_1AA_1 = \angle AA_1B_1$ и $AB_1 = A_1B_1$.

Соединив прямой BB_1 точки B и B_1, получим два треугольника ABB_1 и A_1BB_1, у которых сторона BB_1 будет общей, а другие стороны попарно равными друг другу. Таким образом, три стороны треугольника BAB_1 равны трем сторонам треугольника BA_1B_1, откуда заключаем, что $\angle BAB_1 = \angle BA_1B_1$.

Так как $\angle BAB_1$ является углом между касательными к дугам кругов ab и cd, а угол BA_1B_1 служит углом между касательными к дугам кругов a_1b_1 и c_1d_1, то мы выводим следующее заключение.

Если провести в плоскостях двух больших кругов на сфере касательные к этим кругам в точке их пересечения, то угол между касательными будет равен углу между касательными к кругам, изображающим данные два большие круга в граммастереографической проекции.

14. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОЕКЦИЯМИ ЛИНЕЙНОЙ, ГНОМОНИЧЕСКОЙ И СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ.

Очень легко установить общую связь между изображениями в линейной, гномонической и стереографических проекциях, если только расстояние центра пучка от плоскости линейной или гномонической проекции будет равно радиусу основного круга стереографических проекций.

Установление такой связи имеет важное практическое значение при графическом решении задач в проекциях, так как, пользуясь этой связью, можно всегда значительно упростить необходимые построения и свести их к минимуму.

Положим, $asbcp$ представляет собою диаметральный разрез шара плоскостью рисунка 109, причем O — центр шара. MN и ab — линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к плоскости чертежа, с этой последней. MN —

плоскость проекций; s — точка зрения, Oc — направление, перпендикулярное к плоскости ab.

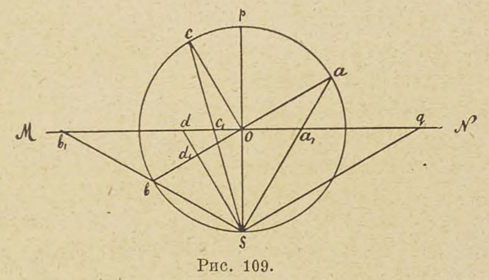


Рис. 109.

При изображении в стереографических проекциях O будет центром пучка проектируемых плоскостей и направлений, причем одной из таких плоскостей и является плоскость ab.

Соединив точку зрения s прямыми с точками a и b, получим две точки a_1 и b_1 — концы диаметра круга, изображающего данную грань ab в стереографической проекции.

Соеденив s и c прямой sc, получаем точку c_1 — граммастереографическую проекцию направления Oc, перпендикулярного к проектируемой грани ab.

Как мы знаем, c_1 будет служить одновременно полюсом дуги круга $a_1 b_1$ и гномостереографической проекцией грани ab.

Приняв за плоскость изображения в линейных проекциях ту же плоскость MN и взяв расстояние центра пучка от плоскости проекций равным радиусу Os, мы должны будем для получения линейной проекции поместить центр пучка ниже плоскости чертежа.

Этого мы достигнем, перемещая все грани и ребра пучка параллельно самим себе до тех пор, пока они не пересекутся в новом центре пучка — точке s.

Проведя qs параллельно ab и sd параллельно Oc, мы осуществим на нашем чертеже (рис. 109) такое перемещение граней и ребер пучка.

Точка d персечения линий MN и sd будет линейной проекцией ребра Oc, а точка q будет одной из точек линейной проекции грани ab.

Так как Oc параллельна sd, то углы cOp и dsO равны. Кроме того, также равны углы Occ_1 и c_1sd.

В треугольнике Ocs стороны Oc и Os равны, как радиусы одного и того же круга, а потому $\angle Occ_1 = \angle c_1 sO$. Из этих равенств заключаем о равенстве углов dsc_1 и $c_1 sO$.

Таким образом, линейная проекция ребра представляет собою точку, находящуюся на вдвое большем угловом расстоянии от центра проекций, сравнительно с расстоянием от того же центра граммастереографической проекции этого ребра.

Треугольник sOa имеет две равные стороны — радиусы круга Oa и sO. В виду этого, $\angle Oas = \angle Osa_1$. Так как прямоугольные треугольники $a_1 sb_1$ и sOa_1 имеют общий угол (неравный прямому) $\angle Oa_1 s$, то эти треугольники подобны и $\angle Osa_1 = \angle Ob_1 s$.

Точно также подобны и прямоугольные треугольники asb и $bd_1 s$. Из этого подобия заключаем: $\angle d_1 sb = \angle Oas$. Так как $\angle Oas = \angle Osa_1$, то $\angle d_1 sb = \angle Ob_1 s$, откуда заключаем, что треугольник $b_1 ds$ — равнобедренный и $b_1 d = ds$.

Из подобия прямоугольных треугольников $ad_1 s$ и $a_1 sb_1$, имеющих равные углы $d_1 as$ и $a_1 b_1 s$, заключаем о равенстве:

$$\angle da_1 s = \angle dsa_1 .$$

На основании этого равенства углов, треугольник $da_1 s$ также будет равнобедренным и линия $da_1 = ds$.

Таким образом, в результате этих рассуждений мы имеем: $ds = da_1 = db_1$, т. е. точка d — линейная проекция направления oc — находится посредине линии $a_1 b_1$ и служит центром круга, представляющего граммастереографическую проекцию плоскости ab, перпендикулярной к Oc.

Приняв линию MN за ось вращения, повернем нашу плоскость проекций на 90^0 до совмещения ее с плоскостью рисунка 110.

В этой плоскости мы будем иметь: $mnm_1 n_1$ — основной круг проекций и все четыре проекции грани ab:

1) $b_1 na_1 n_1$ — граммастереографическую проекцию грани ab; 2) c_1 — гномостереографическую проекцию той же грани; 3) kl — линейную и 4) d — гномоническую проекции грани ab.

Из рис. 109 мы видим, что взаимоотношение между точками a_1 и d совершенно аналогично соотношению между точками c_1 и q.

В самом деле, по построению мы имеем: Oc параллельна ds, а с другой стороны Oa параллельна sq. Точка c_1 получается пересечением линии sc с плоскостью чертежа, а точка a_1 получена пересечением линии as с плоскостью чертежа.

Подобно тому, как d и a_1 соответствуют плоскости ab, представляя d — центр и a_1 точку окружности граммастереографической проекции этой плоскости, точно так же q и c_1 соответствуют направлению cO, представляя q — центр, а c_1 точку окружности гномостереографической проекции направления cO.

В последнем легко убедиться, приняв во внимание, что $sq \perp cO$, так как $sq \parallel Oa$, а $Oa \perp cO$.

В виду этого, точка q будет центром, а c_1q — радиусом круга, проведенного через точку c_1 и через концы диаметра nn_1 (рис. 110) основного круга проекций.

Перейдем теперь к рассмотрению рис. 110, на котором точки, отвечающие точкам рисунка 109, отмечены одинаковыми буквами.

Проведем из точки q, как из центра, приняв qc_1 за радиус, круг c_1nn_1kl.

Этот круг также пройдет через концы диаметра nn_1, как и круг $a_1nb_1n_1$, центром которого будет служить точка d. Точка a_1 круга $a_1nb_1n_1$ будет находиться на угловом расстоянии от центра O, основного круга проекций, вдвое меньшем, сравнительно с расстоянием точки q от того же центра O, так как (рис. 109) $Oa \parallel sq$ и $\angle Oas = \angle Osa = \angle asq$; следовательно: $\angle Osq = 2\angle Osa$.

Точно также легко доказать (рис. 110), что каждая точка дуги na_1n_1 будет находиться на расстоянии от центра O вдвое меньшем, сравнительно с расстоянием от того же центра O соответственной точки прямой kl. Соответствие точек этой прямой и точек дуги na_1n_1 мы установим, проведя прямую через одну из точек прямой kl и через центр O основного круга проекций.

Точка c_1 представляет собою граммастереографическую про-

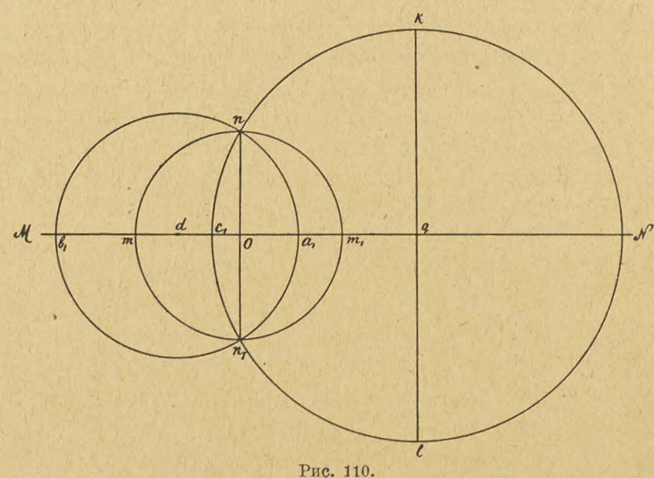


Рис. 110.

екцию ребра, которое можно рассматривать, как линию пересечения пучка плоскостей.

Эти плоскости в граммастереографической проекции изобразятся дугами больших кругов, проходящих через точку c_1.

Гномостереографическая проекция ребра, изображаемого в граммастереографической проекции точкой c_1, будет кругом $b_1 n a_1 n_1$, а гномостереографические проекции (полюсы) плоскостей, проходящих через это ребро, будут точки, расположенные по окружности круга $b_1 n a_1 n_1$.

Гномоническая проекция ребра Oc будет прямая kl, а гномонические проекции пучка плоскостей, пересекающихся в ребре Oc, изобразятся точками, лежащими на прямой kl.

В самом деле, перпендикуляры к плоскостям такого пучка, проведенные через центр пучка, будут лежать в плоскости sq, перпендикулярной к ребру Oc. Плоскость sq даст в пересечении с плоскостью проекций MN прямую kl. Эта прямая будет линейной проекцией плоскости sq и в то же время гномонической проекцией перпендикулярного к ней ребра Oc (или sd, параллельного Oc). Ясно, что перпендикуляры к плоскостям пучка граней, пересекающихся в ребре Oc (или sd), изобразятся точками, лежащими на прямой kl;

итак, в линейной проекции плоскость sq даст прямую kl; ребра, лежащие в этой плоскости, дадут точки на прямой kl.

Таким образом, каждая точка линии kl представляет собою гномоническую проекцию одной из плоскостей, проходящих через ребро Oc.

Полюсы граммастереографических проекций таких плоскостей изобразятся точками окружности $b_1 n a_1 n_1$, а дуги больших кругов, изображающие те же плоскости в граммастереографической проекции, будут проходить через точку c_1.

Так как гномоническая проекция каждой плоскости пучка будет центром круга, изображающего ту же плоскость в граммастереографической проекции, то каждая точка прямой kl будет центром большого круга, проходящего через точку c_1.

Таким образом, линия kl будет геометрическим местом центров больших кругов, проходящих через точку c_1.

В треугольнике $c_1 q s$ (рис. 109) угол $c_1 s q$ равен сумме двух углов $c_1 s O$ и Osq.

Из прямоугольного треугольника $c_1 Os$ имеем:

$$\angle Oc_1 s = 90^0 - \angle c_1 s O \qquad \text{(a)}$$

Кроме того, $\angle d_1 sq = 90^0 = \angle d_1 sc_1 + \angle c_1 sq$.

Так как $\angle d_1 sc_1 = \angle c_1 s O$, то

$$\angle c_1 sq = 90^0 - \angle c_1 s O \qquad \text{(b)}$$

Из равенств (a) и (b) заключаем, что $\angle c_1 sq = \angle Oc_1 s$ и треугольник $c_1 qs$ будет равнобедренным, т. е. $c_1 q = qs$.

Так как c_1 — гномостереографическая проекция некоторой плоскости пучка; q — точка пересечения диаметра $s_1 q$ с линейной проекцией той же плоскости и s — точка зрения, то из только что выведенного равенства $c_1 q = qs$ мы можем получить определенное соотношение между положением точек q и c_1, а именно:

Расстояние гномостереографической проекции c_1 некоторой плоскости пучка от ее линейной проекции равно расстоянию точки q — пересечения диаметра, проходящего через c_1 с линейной проекцией данной плоскости, от точки зрения s.

Если точку q мы примем за центр круга, проходящего через точку s, то такой круг будет граммастереографической проекцией плоскости, перпендикулярной к данной.

На основании всего только что изложенного мы устанавливаем связь между линейной и гномонической проекциями с одной стороны и стереографическими проекциями с другой.

Как мы видели выше, эта связь может быть установлена следующими положениями.

1. Гномоническая проекция некоторой плоскости есть центр круга, представляющего ту же плоскость в граммастереографической проекции.

2. Линейная проекция ребра есть центр круга, представляющего гномостереографическую проекцию того же ребра.

3. Линейная проекция некоторой грани представляет собою геометрическое место центров дуг больших кругов, проходящих через гномостереографическую проекцию той же грани. Центр O основного круга находится между этими проекциями.

4. Гномоническая проекция ребра есть геометрическое место центров больших кругов, проходящих через граммастереографическую проекцию того же ребра. Центр O основного круга находится между этими проекциями.

5. Гномостереографическая проекция грани находится на вдвое меньшем угловом расстоянии от центра основного круга проекций, сравнительно с расстоянием от этого центра гномонической проекции той же грани (при одинаковом радиусе обоих проекций).

Обе эти проекции находятся на одном и том же радиусе основного круга проекций и по одну и ту же сторону от центра O.

6. Каждая точка прямой, изображающей данную плоскость в линейной проекции, находится на вдвое большем угловом расстоянии от центра O основного круга проекций, сравнительно с расстоянием соответствующей ей точки на дуге большого круга, изображающего ту же грань в граммастереографической проекции. Как линейная проекция, так и соответствующая ей дуга большого круга, изображающего данную грань в граммастереографической проекции, находят-

ся по одну и ту же сторону от центра O основного круга проекций.

7. Каждая точка прямой, изображающей данное ребро в гномонической проекции, находится на вдвое большем угловом расстоянии от центра O основного круга проекций, сравнительно с расстоянием соответствующей ей точки на дуге большого круга, изображающего то же ребро в гномостереографической проекции. Как гномоническая проекция, так и соответствующая ей дуга большого круга, изображающего данное ребро в гномостереографической проекции, находятся по одну и ту же сторону от центра O основного круга проекций.

15. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ ПРИ ПОМОЩИ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ.

Те важные характерные особенности, которыми отличаются стереографические проекции от всех других видов проекций, дают возможность решать самые различные задачи при помощи чрезвычайно простых геометрических операций, сводящихая к проведению прямых линий и кругов. Все задачи, решаемые при помощи стереографических проекций, сводятся, в конце концов, к немногим основным проблемам, на решении которых мы и остановимся.

Задача 1. *Построить дугу большого круга в плоскости стереографических проекций, если дан полюс p этой дуги* (рис. 111).

Общие соображения. Полюс дуги большого круга лежит на радиусе основного круга проекций, перпендикулярном к тому диаметру основного круга проекций, через концы которого проходит искомая дуга. В виду этого, мы простым построением находим две точки искомой окружности q и s. Найдя еще одну точку той же окружности, мы уже сможем построить и самую окружность. За третью точку искомой окружности мы можем принять граммастереографическую проекцию каждого направления, перпендикулярного к ребру, изображенному в стереографической проекции точкой p.

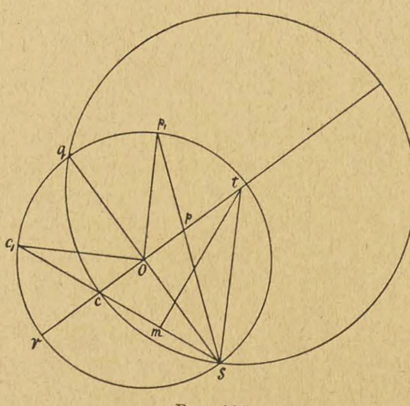


Рис. 111.

Решение задачи. Проводим диаметр pr через данную точку p и перпендикулярный к нему диаметр sq. Получаем две точки s и q, находящиеся на искомой окружности. Соединяем s с p прямой и продолжаем ее до пересечения с окружностью rqs в точке p_1. Соединив p_1 с o, построим прямой угол p_1oc_1. Соединив прямой c_1 и s, находим точку c пересечения линий rp и sc_1. Точка c будет третьей точкой искомой окружности. Заметим, кроме того, что центр искомого большого круга находится на диаметре pr. Из средины отрезка cs восставляем перпендикуляр mt, причем точка t пересечения этого перпендикуляра с диаметром rt и будет центром искомого круга qcs.

При решении этой задачи мы можем воспользоваться связью, установленной между гномонической, линейной и стереографическими проекциями. Проведя диаметры rt и sq, а также прямые sp_1 и p_1o, проводим через точку s прямую st, параллельную op_1. При таком построении получаем: $\angle pst = \angle osp$. Точка t будет линейной проекцией направления, изображенного в граммастереографической проекции точкой p. На основании выведенной выше связи между различными видами проекций заключаем, что точка t будет центром искомого круга.

Задача 2. *Провести дугу большого круга через две данные в плоскости стереографических проекций точки a и b* (рис. 112).

Общие соображения. Как нам известно, точки a и b могут служить в стереографических проекциях:

1) Граммастереографическими проекциями некоторых направлений.

2) Гномостереографическими проекциями некоторых плоскостей.

Для решения поставленной задачи нам совершенно безразлично, будут ли эти точки представлять собою гномо- или граммастереографические проекции.

Мы можем принять, что данные точки a и b представляют собою полюсы двух дуг больших кругов.

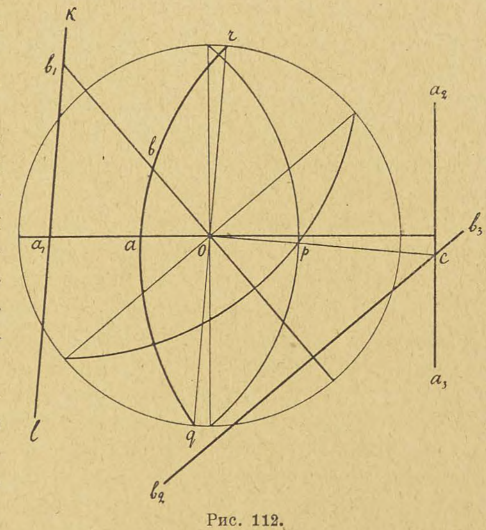


Рис. 112.

Как мы уже видели, каждая дуга круга будет геометрическим местом точек, находящихся на расстоянии 90° от ее полюса.

Приняв a и b за полюсы и проведя дуги соответственных больших кругов, найдем точку p, пересечения этих кругов. Эта точка будет одновременно принадлежать обоим кругам, полюсы которых нам даны. В виду этого, точка p пересечения двух, построенных нами, кругов будет находиться на угловом расстоянии в 90° от обоих данных точек a и b, т. е. будет служить полюсом дуги большого круга, проходящего через данные точки a и b.

Определив таким образом положение полюса p искомого круга, мы можем построить этот круг, приняв во внимание, что его полюс p находится на радиусе oc основного круга проекций, перпендикулярном к диаметру rq, через концы которого проходит искомый большой круг.

Решение задачи. Как мы видели из общих соображений, решение задачи сводится к нахождению двух дуг по данным полюсам, а затем опять к построению дуги по найденному ее полюсу.

Так как эти построения описаны подробно в первой задаче, то мы здесь и не будем на них останавливаться.

При решении этой задачи, мы также можем воспользоваться связью, установленной между различными видами проекций.

1. Приняв данные точки a и b за граммастереографические проекции прямых (рис. 112), находим их линейные проекции — две точки a_1 и b_1.

Прямая kl, проведенная через точки a_1 и b_1, будет линейной проекцией той плоскости, которая изобразится в граммастереографической проекции искомой дугой большого круга. Для нахождения этого круга проводим диаметр rq, параллельный найденной линейной проекции плоскости, а также строим гномоническую проекцию c той же плоскости.

Концы диаметра rq будут двумя точками искомого круга $rbaq$, а гномоническая проекция плоскости — точка c будет его центром.

2. Приняв данные точки a и b за граммастереографические проекции прямых, находим их гномонические проекции — линии a_2a_3 и b_2b_3. Точка c пересечения этих линий будет центром искомого круга $rbaq$.

Для решения задачи по способам, указанным в п. 1 и 2, необходимо осуществлять переход от одного вида проекций к другому. Практическое осуществление таких переходов совершенно аналогично тем построениям, которые мы делали при рассмотрении соотношений между линейной, гномонической и стереографическими проекциями. Вследствие этого, мы здесь не будем останавливаться на описании соответственных построений.

Задача 3. *Найти граммастереографическую проекцию плоскости пучка, пересекающейся с данной плоскостью под углом α, и проходящей через данную прямую, находящуюся в данной плоскости.*

Общие соображения. Для решения поставленной задачи необходимо иметь следующие данные (рис. 113): 1) дугу большого круга snp, представляющую собою граммастереографическую проекцию данной плоскости, 2) точку n на этой дуге и 3) величину угла α.

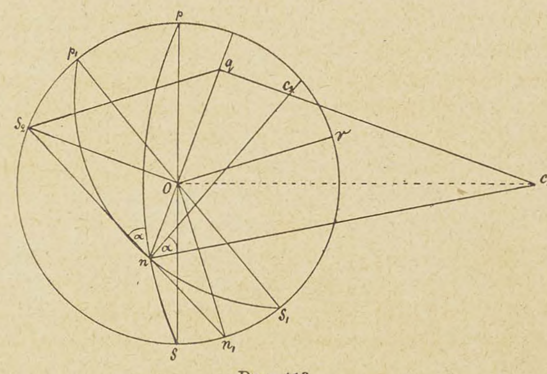


Рис. 113.

Самая задача заключается в проведении через точку n второй дуги большого круга, образующей с данной дугой угол α.

Для однозначного решения задачи необходимо указание относительного положения угла α, т. е., необходимо знать будет ли искомая дуга образовывать угол по правую или по левую сторону от данной дуги и будет ли этот угол, имеющий вершиной точку n, обращен своими сторонами вниз или кверху.

Если эти указания даны, то решение вполне однозначно. При решении этой задачи мы должны иметь в виду основное свойство стереографических проекций, а именно, что углы между дугами больших кругов в проекции равны углам между проектируемыми большими кругами на поверхности шара.

Приняв во внимание это свойство стереографических проекций, мы заключаем, что при построении граммастереографической проекции второй дуги, нам придется строить угол, равный данному углу α. Этот угол может быть определен, как угол между касательными к обоим дугам в точке их пересечения n, или как угол между радиусами соответственных больших кругов в проекции.

Мы воспользуемся последним определением.

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению центра c_1 данного большого круга, построению угла α, а

затем к определению положения центра c_2 искомой второй дуги большого круга. Центр c_2 будет служить точкой пересечения двух прямых: 1) радиуса nc_2 искомой дуги большого круга, проведенного через точку n под углом α к радиусу nc_1 данного круга pns; 2) гномонической проекции qc_1 прямой, изображающейся в граммастереографической проекции точкой n. Прямая qc_1 будет геометрическим местом дуг больших кругов, проходящих через точку n.

Таким образом, для решения задачи необходимо найти две вышеуказанные прямые.

Решение задачи (рис. 113). Находим центр c_1 дуги круга snp. Проводим радиус $c_1 n$. Приняв n за вершину, строим угол $c_1 n c_2$, равный данному углу α. Находим гномоническую проекцию направления, изображенного в граммастереографической проекции точкой n, для чего проводим через точку n отрезок диаметра nq и перпендикулярный к нему радиус os_2.

Проводим прямую $s_2 n_1$, проходящую через точку n. Соединяем найденную таким образом точку n_1, окружности с центром o и проводим or, перпендикулярную on_1. Из точки s_2 проводим прямую $s_2 q$, параллельную or. Находим точку пересечения q диаметра nq и линии $s_2 q$.

Проводим линию qc_1. Эта линия будет перпендикулярна к диаметру nq и будет представлять собою искомую гномоническую проекцию ребра, изображенного в граммастереографической проекции точкой n.

Точка c_2 пересечения линий qc_1 и nc_2 будет центром искомой дуги, которая и изображена на рис. 113 в виде дуги большого круга $s_1 n p_1$.

Задача 4. *Найти граммастереографические проекции всех направлений, образующих угол α с данным направлением, изображаемым в граммастереографической проекции точкой a* (рис. 114).

Общие соображения. Направления пучка, образующие с данным направлением Oa определенный угол α, в своей совокупности образуют поверхность прямого круглого конуса с вершиной в центре шара, причем данное направление будет представлять собою ось этого конуса.

При пересечении с поверхностью шара, прямой круглый конус даст вообще некоторый малый круг, который мы и должны будем проектировать обычным путем, т. е., соединяя каждую точку этого круга с глазной точкой s.

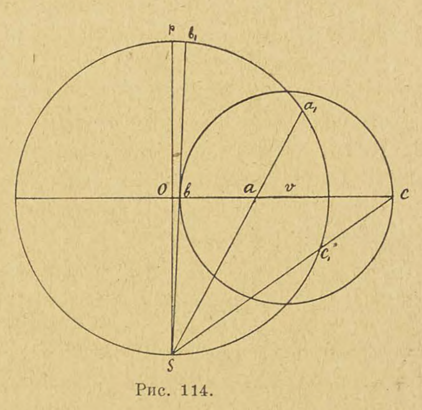


Рис. 114.

Проделав это, мы получим поверхность уже другого конуса, а именно, косого круглого конуса с вершиной в точке s, одно из круговых сечений которого будет находиться на поверхности шара, а другое в плоскости проекций. Таким образом, задача сводится к построению в плоскости проекций малого круга, все точки которого должны быть на одинаковом угловом расстоянии от некоторой точки a, находящейся на той же плоскости проекций.

Для решения этой задачи мы рассмотрим диаметральный разрез шара плоскостью, проходящей через ось sa_1 косого круглого конуса.

В этой плоскости мы будем иметь две производящие искомого конуса, причем угол между ними будет равен углу 2α, а угол между каждой производящей и осью конуса будет α.

Так как взятый нами разрез шара будет диаметральным, то в этом же разрезе находится и центр o шара.

Кроме того, по построению, в этом разрезе будут находиться проекции двух противоположных производящих и оси конуса. В виду этого, в пересечении плоскости проекций с таким разрезом шара, мы будем иметь центр искомого малого круга и две точки этого круга, находящиеся на концах одного из его диаметров.

Решение задачи (рис. 114). Через данную точку a проводим радиус oc основного круга проекций $pb_1a_1c_1s$. Строим диаметр ps, перпендикулярный oc. Соединияем точки s и a

прямой sa, пересекающейся с окружностью основного круга проекций в точке a_1.

От точки a_1, по окружности основного круга проекций, откладываем равные дуги a_1b_1 и a_1c_1, по величине соответствующие центральным углам α.

Соединив точку s прямыми с точками b_1 и c_1, находим точки b и c пересечения этих прямых с диаметром oc. Отрезок прямой между точками b и c будет диаметром искомой проекции малого круга. Разделив линию bc пополам, находим точку v — центр искомого круга, который и изображен на рисунке 114.

16. СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ СЕТКА.

Решение приведенных выше задач, при помощи того или другого вида кристаллографических проекций, требует довольно большого количества геометрических построений. Большинство этих построений относится к нахождению положения той или другой проекции на плоскости чертежа, причем все подобные построения связаны с некоторыми определенными данными, которые могут быть выражены в угловых величинах.

В виду этого, мы можем значительно упростить необходимые построения и свести их к минимуму, если на плоскости проекций нам будут заранее даны проекции различных граней и ребер пучка, находящихся на определенных угловых расстояниях от некоторых постоянных точек на плоскости проекций.

Построив систему таких проекций, мы получим соответственную плоскую сетку.

Такая сетка может быть получена для какого угодно вида проекций. Здесь мы остановимся только на рассмотрении, так называемой, стереографической сетки.

Существует несколько типов стереографических сеток, построенных в разное время различными авторами (Е. С. Федоров, Г. В. Вульф, Пенфильд и др.). Наиболее удобной и самой употребительной в настоящее время является стереографическая сетка Е. С. Федорова, с радиусом в 10 сантиметров, т. е. вдвое большего радиуса, сравнительно с изо-

браженной на рис. 115. Эта сетка может быть рассматриваема, как граммастереографическая проекция трех систем плоскостей, пересекающихся между собой по трем взаимноперпендикулярным диаметрам шара.

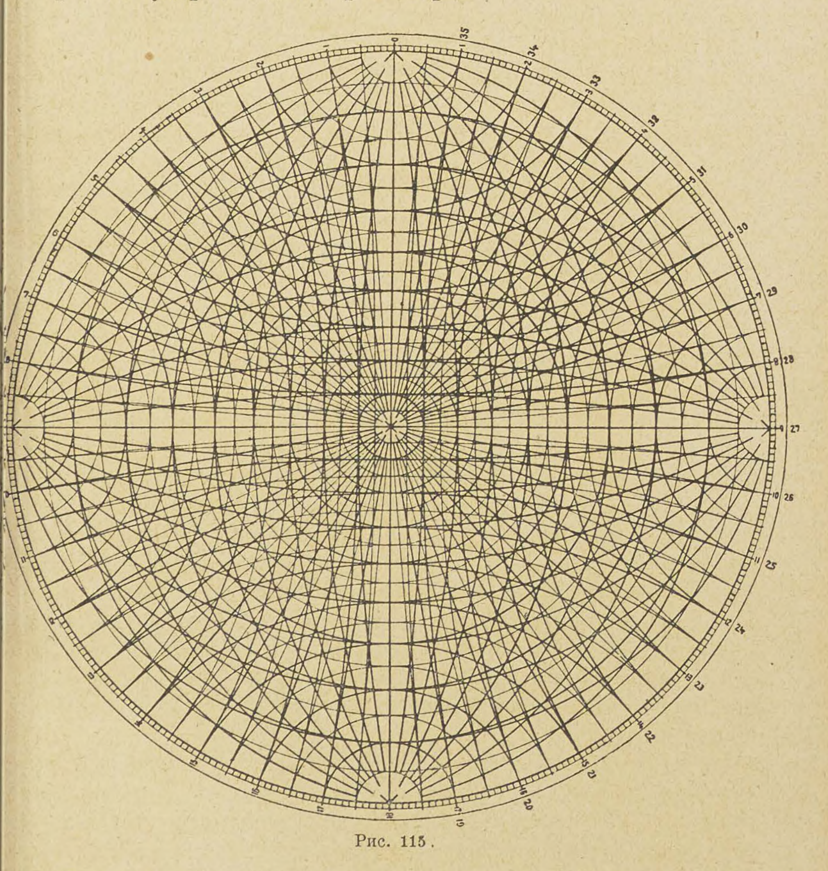


Рис. 115.

Угловое расстояние, между двумя ближайшими друг к другу плоскостями системы, равно 10^0.

Каждая такая система пересекается рядом плоскостей, перпендикулярных к линии пересечения плоскостей данной си-

стемы и находящихся на расстоянии 5°, считая по дугам больших кругов, образуемых плоскостями соответствующей системы.

Каждая плоскость, пересекающая данную систему плоскостей, изображена на сетке в граммастереографической проекции.

В виду того, что эти плоскости вообще не проходят через центр шара, их граммастереографические проекции будут дугами малых кругов, в то время как каждая плоскость системы изобразится дугой большого круга.

Таким образом, стереографическая сетка будет представлять собою серию граммастереографических проекций больших и малых кругов, причем каждый малый круг будет перпендикулярен ко всем большим кругам данной системы, и наоборот.

Для построения стереографической сетки Е. С. Федорова, удобнее всего начать с построения проекций той системы, плоскости которой пересекаются по диаметру шара, перпендикулярому к плоскости проекций. Для этого, возможно тщательнее делим основной круг проекций на градусы. Выбираем два взаимно-перпендикулярных диаметра *MN* и *SP* (рис. 116) основного круга проекций. Приняв *S* за точку зрения, проводим через эту точку и деления основного круга проекций, начиная от *P* до *N*, через каждые 5°, прямые, изображенные на рис. 116. Приняв центр основного круга проекций за центр малых кругов, проводим эти круги, принимая за их радиусы расстояния от *O* до точек пересечения лучей, проведенных из точки *S*, с диаметром *MN*. Проделав эти построения, получаем систему концентрических кругов с общим центром *O*.

Затем проводим радиусы *ON*, *OM* и т. д. начерченных кругов также через каждые 5°, начиная от проведенного уже радиуса *OP*. Через точки пересечения с радиусом *ON* лучей, проходящих через *S* и отмечающих каждые пять градусов, и две постоянные точки, концы перпендикулярного к нему диаметра *PS*, проводим дуги больших кругов. Такие же дуги больших кругов проводим, приняв за постоянные точки *M* и *N*.

Наконец, проводим дуги малых кругов, имеющих центры на продолжении диаметров MN и SP. Проделав эти построения, получаем стереографическую сетку Е. С. Федорова.

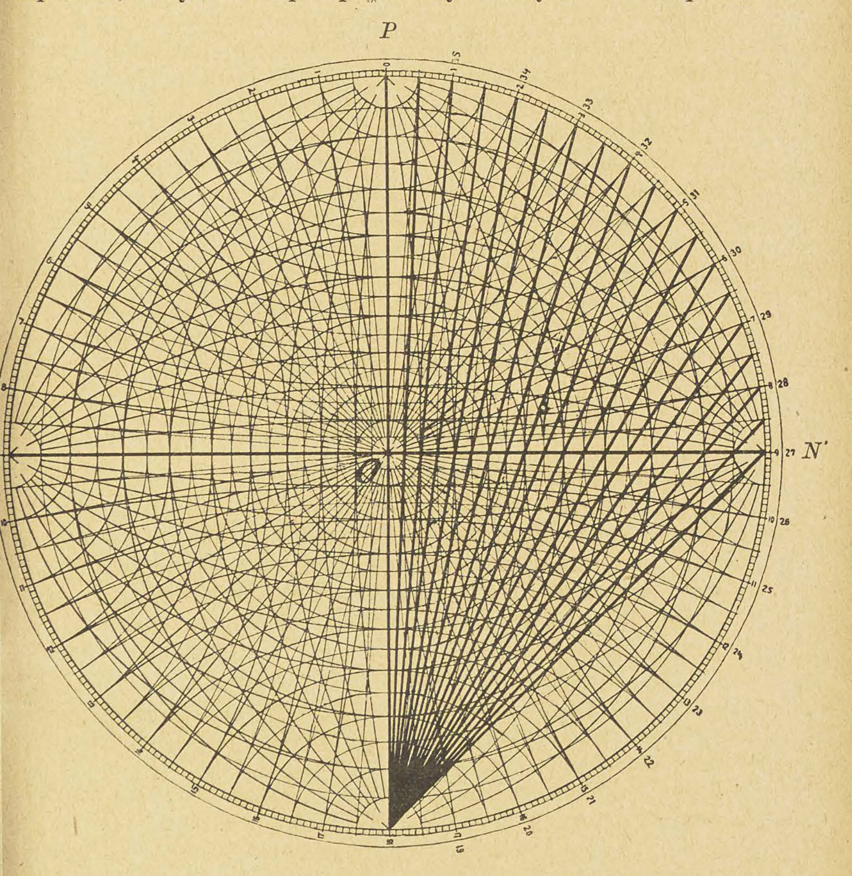


Рис. 116.

Как уже было сказано выше, можно сильно упростить решение стереографических задач, если только у нас имеются проекции, изображенные на стереографической сетке.

В самом деле, на сетке можно, с значительной точностью, отсчитывать стереографические угловые расстояния точек от центра O, даже прямо на глаз, с точностью в среднем до $1/2^0$, так как радиусы разделены на углы в 5^0. Конечно, точность отсчетов повышается при увеличении диаметра сетки и достигает величины $1/2^0$ при диаметре, равном 20 см. Таков именно диаметр сеток Е. С. Федорова.

Таким образом, при употреблении стереографической сетки, мы избегаем всех построений, связанных с нахождением полюсов дуг больших кругов, а имея градусные деления основного круга сетки, можем всегда с большой точностью находить любые угловые расстояния.

Кроме того, в кристаллографической практике очень часто приходится решать вопросы, связанные с изменением плоскости проекций. Такие вопросы решаются при помощи стереографической сетки очень легко и быстро.

17. ИЗМЕНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ.

Положим (рис. 117), точки h_1, h_2, h_3 и O_1, отмеченные на рисунке черными кружками, представляют собою гномостереографические проекции 4-х граней некоторого кристаллического многогранника, причем проекция O_1 помещается в центре основного круга стереографической сетки.

Положим, требуется изменить плоскость проекций таким образом, чтобы в ней находились перпендикуляры к граням h_2 и h_3. Это значит, что новой плоскостью проекций должна служить плоскость, изображением которой в граммастереографической проекции будет дуга большого круга, проходящая через гномостереографические проекции граней h_2 и h_3.

Проведя через точки h_2 и h_3 дугу большого круга ah_2h_3b, замечаем концы a и b диаметра сетки и отсчитываем число градусов между точками a и одним из полюсов сетки, находящихся на окружности основного круга проекций. При таком отсчитывании берется один из полюсов, напр. a_1, между которыми находится точка a.

Повертываем все данные точки на проекции вокруг центра O_1 до тех пор, пока точка a не совпадет с полюсом a_1. При

таком вращении все точки будут двигаться по дугам малых кругов, имеющих центр в точке O_1, которая останется на месте.

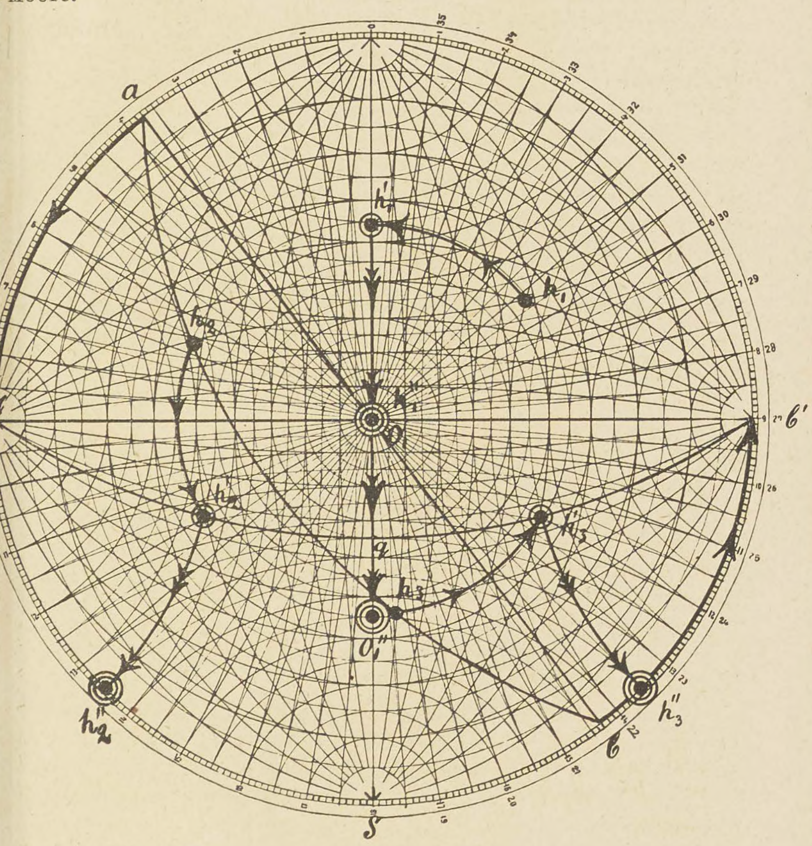


Рис. 117.

Перемещение точек a, b, h_1, h_2 и h_3 указано на рис. 117 дугами соответствующих кругов, а новое положение этих точек будет a', b', h_1', h_2' и h_3'. Это положение отмечено на рис. 117 кружками с одним кольцом.

После такого вращения дуга ah_2h_3b принимает положение дуги $a'h_2'h_3'b'$, причем a' и b' будут совпадать с полюсами сетки.

Отсчитав угловое расстояние между нижним полюсом S сетки и точкой пересечения q дуги $a'h_2'h_3'b'$ с радиусом O_1S, примем за ось вращения диаметр шара, проектирующийся полюсами a' и b'.

Произведем теперь вращение вокруг этой оси точек h_1', h_2', h_3' и O_1 на угол Sq. При таком вращении точки a' и b' останутся на месте, а все другие точки будут двигаться по дугам малых кругов, сферическими центрами которых будут служить концы диаметра $a'b'$.

Соответственное перемещение точек при таком движении указано на рис. 117 двойными стрелками.

После такого вращения дуга $a'h_2'h_3'b'$ совпадет с основным кругом сетки, а точки h_1, h_2, h_3 и O_1 займут положения точек h_1'', h_2'', h_3'' и O_1'', отмеченных на рис. 117 черными кружками с двумя кольцами.

18. ПРОЕКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ВЕКТОРИАЛЬНЫХ КРУГОВ.

Для изображения на плоскости точек, данных в пространстве, мы можем иногда пользоваться векториальными кругами. Изображение векториальными кругами особенно удобно в том случае, если в пространстве дана система точек, расположенных с определенной правильностью.

Из данной точки a опускаем перпендикуляр на плоскость проекций и отмечаем на этой плоскости точку a_1 пересечения перпендикуляра с плоскостью чертежа. Из точки a_1 проводим окружность радиусом, равным расстоянию точки a от плоскости чертежа.

На этой окружности стрелкой отмечаем направление, причем, для всех точек, лежащих выше плоскости чертежа, направление берется в одну сторону, а для точек, лежащих под плоскостью чертежа берем противоположное направление. Каждая такая окружность с отмеченным на ней направлением и называется векториальным кругом.

19. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ.

Изображения кристаллического многогранника в линейной, гномонической и стереографических проекциях преследуют, как мы видели, цель получить такое изображение, в котором были бы вполне ясно и отчетливо показаны угловые соотношения между элементами этого многогранника.

Однако, если мы зададимся целью изобразить кристаллический многогранник на плоскости так, чтобы в изображении был наиболее отчетливо и ясно представлен внешний облик данного многогранника, то все рассмотренные нами виды проекций будут совершенно неудовлетворительны. В самом деле, при получении линейной, гномонической и стереографических проекций многогранника, мы заменяли данный многогранник пучком граней и ребер. Если же мы хотим изобразить внешний облик данного многогранника, то такая замена уже не допустима и нам необходимо изобразить то, что мы наблюдаем в действительности, т. е. приблизиться к перспективному изображению.

Для получения таких изображений кристаллических многогранников употребляется, так называемая, прямая или косая ортогональная проекция.

Прямая ортогональная проекция иногда еще называется „видом сверху", в то время как косая ортогональная проекция представляет собою обычный рисунок кристаллического многогранника.

20. ИЗОБРАЖЕНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ В КОСЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ.

Обычно, так называемые, чертежи кристаллов представляют собою изображения кристаллических многогранников в косых ортогональных проекциях. Иногда даются изображения, которые являются, так наз., „видом сверху". Эти изображения также ни что иное, как ортогональная проекция.

Чтобы получить ортогональную проекцию данного предмета, необходимо из каждой его точки опустить перпендикуляр на плоскость проекций.

Точки пересечения этих перпендикуляров с плоскостью чертежа и будут ортогональной проекцией данного предмета.

Таким образом, ортогональная проекция представляет собою перспективное изображение, причем центр перспективы находится в бесконечности.

Для изображения в ортогональной проекции отрезка прямой, не лежащей в плоскости проекции, мы можем опустить перпендикуляры из концов отрезка на плоскость проекции и, соединив точки пересечения этих перпендикуляров с плоскостью чертежа прямой линией, получим ортогональную проекцию данного отрезка.

При вычерчивании кристаллов в ортогональной проекции изображают только проекции его ребер и, таким образом, получают рисунок кристалла. При этом, все параллельные линии на кристалле изобразятся в ортогональной проекции также параллельными линиями.

Равенство углов вообще не сохраняется, исключая равных углов с параллельными сторонами.

Длины ребер и размеры граней также меняются, в зависимости от положения ребра или грани, относительно плоскости проекций.

По существу, получение вида сверху почти ничем не отличается от способа изображения кристалла в косой ортогональной проекции, если пользоваться гномостереографической проекцией граней, данного кристаллического комплекса.

Однако, вид сверху можно получить гораздо проще, не изменяя плоскости проекций, в то время как изображение в косой ортогональной проекции получается только после изменения обычной ориентировки кристаллического многогранника относительно плоскости стереографических проекций. Поэтому мы сначала опишем способ получения вида сверху.

Заметим, что при всех дальнейших рассуждениях мы будем принимать, что данная стереографическая проекция изображена на стереографической сетке.

Представим себе наш кристалл в виде типического многогранника, т. е. такого многогранника, все грани которого касаются поверхности вписанного в него шара. Тогда гномостереографическая проекция каждой грани будет в то же время изображать точку касания одной из плоскостей многогранника, описанного около шара с радиусом, равным радиусу сетки.

Теперь необходимо найти граммастереографические проекции радиусов шара, проходящих через вершины типического многогранника. Принимая во внимание, что наименьшее количество граней, пересекающихся в одной точке, есть 3, мы можем предположить, что каждые три грани, проекции которых находятся всего ближе друг к другу, образуют вершину многогранника. Кроме того, заметим, что радиус шара, проходящий через вершину типического многогранника, является в то же время осью конуса с круговым основанием, проходящим через точки касания (гномостереографические проекции) данных трех граней. Граммастереографическая проекция такого кругового основания будет изображаться на сетке малым кругом, проходящим через гномостереографические проекции трех граней. Плоскостной центр этого круга, очевидно, будет отличаться от стереографического центра, причем этот последний будет находиться на том же радиусе сетки, на котором расположен и плоскостной центр круга. Кроме того, стереографический центр найденного малого круга будет, в то же время, проекцией радиуса шара, проходящего через вершину многогранника. Чтобы получить эту проекцию, ставим в найденный плоскостной центр одну ножку циркуля, раскрытого на величину радиуса круга, проходящего через гномостереографические проекции трех, взятых нами, граней.

Другую ножку циркуля переносим до совпадения с тем радиусом сетки, на котором находится плоскостной центр. При повороте этой ножки циркуля на 180^0 получим второе совпадение ее с тем же радиусом сетки. Отсчитаем от центра проекций число градусов по тому же радиусу до первого и до второго совпадения ножки циркуля с данным радиусом. Взявши полусумму отсчитанных углов и отложив от центра по

тому же радиусу найденное таким образом число градусов, мы получим точку, которая и будет искомой граммастереографической проекцией того радиуса сферы, который проходит через одну из вершин типического многогранника. Сделав подобные построения для проекций всех граней по три взятых, и соединив найденные точки дугами больших кругов, мы найдем проекцию того деления полусферы, которое получится, если в соответствующих точках (гномостереографических проекциях граней) проведем касательные грани, а через центр вписанного шара и через ребра граней проведем центральные плоскости, которые пересекут сферу в дугах больших кругов.

Обведя, вышеуказанным образом, контуры многогранника на сфере (в проекции), мы можем непосредственно получить вид кристалла сверху, т. е. его ортогональную проекцию.

Для этого необходимо только найти изображение вершин многогранника в этой проекции.

Принимаем за плоскость чертежа плоскость, перпендикулярную к направлению, проектирующемуся в центре сетки.

Возьмем эту плоскость на таком расстоянии от центра сферы стереографических проекций, чтобы все вершины, изображаемого многогранника, находились ниже плоскости чертежа.

После этого, переместим плоскость чертежа вниз, до совпадения ее с одной или несколькими ближайшими к ней вершинами многогранника.

Расстояние этих вершин от центра сферы определится по формуле: $x = \frac{R}{\cos\alpha}$, где x — искомое расстояние, R — радиус сферы и α — угол между линией, соединяющей данную вершину с центром сферы и радиусом шара, перпендикулярным к одной из граней, образующих данную вершину. Расстояние плоскости чертежа от центра сферы определится по формуле: $n = x\cos\beta = \frac{R\cos\beta}{\cos\alpha}$, где n — искомое расстояние и β — угол между линией, проходящей через вершину и центр сферы, и нормалью, проведенною из центра шара к плоскости чертежа.

Вышеприведенные фомулы мы можем легко найти на основании следующего рассуждения.

Положим (рис. 118), Or — радиус шара, перпендикулярный к некоторой грани A_1, образующей с гранями A_2 и A_3 вершину p, лежащую в плоскости чертежа MN. Соединим p с O и r. Так как линия pr находится в плоскости A_1, то угол prO равен прямому. Если α — угол между pO и rO, то из прямоугольного треугольника prO находим: $pO = x = \frac{rO}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$.

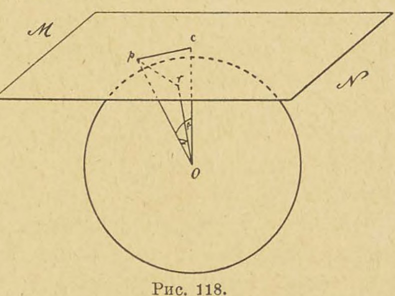


Рис. 118.

Соединив точку p с точкой c пересечения нормали Oc к плоскости чертежа с этой последней, получим прямоугольный треугольник pcO. Обозначив $\angle pOc = \beta$, получаем $Oc = pO \cdot \cos\beta = \frac{R\cos\beta}{\cos\alpha}$ и расстояние вершины p от c равно $pc = \frac{R\,\mathrm{sn}\,\beta}{\cos\alpha}$.

Чтобы, при нахождении первой вершины, избежать вычислений по формулам, мы можем применить следующий графический метод.

Проведем касательную к внешнему кругу проекций (рис. 119), перпендикулярную радиусу Or_1, на котором находится точка r — гномостереографическая проекция грани A.

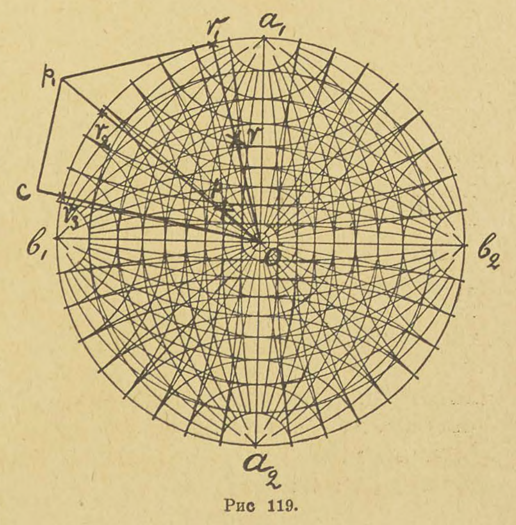


Рис 119.

Если p — проекция вершины, обра-

зуемой гранями A_1, A_2 и A_3, то, отсчитав по дуге большого круга pr угловое расстояние между точками p и r, откладываем этот угол от точки r_1 по внешнему кругу проекций. Находим точку r_2, лежащую на внешнем круге проекций. Из точки r_1 проводим касательную к внешнему кругу и находим точку p_1 пересечения этой касательной с секущей, проведенной через точку r_2 и центр O. $p_1 O$ будет выражать расстояние первой вершины от центра шара с радиусом, равным $(Or_1 = R)$ радиусу сетки.

От точки r_2 внешнего круга проекций, откладываем угол β, равный угловому расстоянию точки p от центра O. Находим точку r_3. Проведя радиус через точку r_3, опускаем на него перпендикуляр $p_1 c$ из точки p_1. В таком случае: cO — расстояние плоскости чертежа от центра сферы, а $p_1 c$ — расстояние первой вершины от центра проекций.

Подобное нахождение положения первой вершины должно применяться только в том случае, если ни одна грань кристалла не проектируется в центре. Если же центр диаграммы является проекцией грани, то положение первой вершины непосредственно определяется, как линейная проекция направления op, изображаемого точкой p в граммастереографической проекции.

Определив, описанным выше способом, положение первой вершины многогранника, мы переходим к нахождению второй вершины, соединенной с первой ребром, изображенным в виде дуги большого круга. Эта вторая вершина должна находиться, так же, как и все другие, на линии, соединяющей ее с центром диаграммы (радиус этой вершины).

Положение второй вершины определяется весьма просто. Положим, ребро, соединяющее 1-ю и 2-ю вершины, есть ребро пересечения граней A_1 и A_2. Очень нетрудно решить, каким граням принадлежит это ребро, так как гномостереографические проекции всех граней находятся внутри соответственных сферических многоугольников, которые мы получаем при изображении проекций контуров кристалла на сфере. Стороны такого многоугольника изображают ребра каждой грани со смежными с ней.

Тогда, проведя через проекции этих граней дугу большого круга, замечаем положение концов этой дуги на внешнем круге сетки. Перпендикуляр к этой дуге и будет представлять ребро между гранями A_1 и A_2 в ортогональной проекции. Перемещаем найденный перпендикуляр параллельно самому себе до тех пор, пока на нем не будет находиться найденная нами первая вершина. Точка пересечения этого перпендикуляра с радиусом, на котором находится проекция 2-й вершины, даст нам изображение этой вершины на чертеже, а сам перпендикуляр изобразит ребро.

Совершенно таким же построением находятся остальные вершины и ребра.

В результате всех этих построений получаем вид кристалла сверху, причем, изображаемый кристаллический многогранник будет типическим, описанным вокруг шара с радиусом, равным радиусу сетки.

Заметим, что за первую вершину на чертеже можно принять какую угодно точку, лежащую на одном из радиусов, сетки, проходящих через граммастереографическую проекцию одного из направлений, соединяющих центр сферы с вершиной многогранника.

При таком построении, мы получим изображение кристалла в косой ортогональной проекции, также в виде типического многогранника, но, описанного вокруг шара с диаметром, не равным диаметру сетки, причем ясно, что этот диаметр будет увеличиваться по мере удаления первой вершины от центра проекций.

Вид кристалла сверху имеет тот существенный недостаток, что все плоскости, проекции которых лежат на внешнем круге диаграммы, изобразятся прямыми линиями.

Чтобы получить рельефное изображение и избежать такого неудобства, необходимо изменить угол зрения.

При таком изменении угла зрения, прежде всего, ставится задача изображения вида кристалла не сверху, а спереди.

Так как, при обыкновенной ориентировке проекции кристалла, в центре O стереографической сетки помещается граммастереографическая проекция того направления в кристалле, которое должно быть расположено вертикально, при

рассматривании кристаллического многогранника, то, прежде всего, мы и должны изменить расположение проекций элементов данного многогранника так, чтобы граммастереографическая проекция такого вертикального направления заняла положение в верхнем a_1 и нижнем a_2 полюсах стереографической сетки (рис. 119).

Такого изменения положения вертикального направления кристаллического многогранника легко достигнуть путем поворота всех проекций на стереографической сетке, вокруг горизонтального диаметра сетки, на угол в 90^0.

Изменив таким образом положение всех проекций элементов кристаллического многогранника на сетке, вращаем всю систему проекций вокруг диаметра $a_1 a_2$ справа налево на 20^0, а затем вокруг диаметра $b_1 b_2$ на 10^0 сверху вниз. Практика черчения кристаллов показала, что при таком угле зрения получаются, обыкновенно, наиболее наглядные чертежи. Иногда приходится применять и другие углы поворотов.

Изменив таким образом положение проекций элементов кристаллического многогранника, получаем чертеж кристалла в косой ортогональной проекции, совершенно таким же способом, как это уже было описано для нахождения вида сверху.

21. ОРТОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ.

Как мы уже видели, для того, чтобы получить рисунок кристаллического многогранника, дающий впечатление рельефного изображения, всего выгоднее употреблять косую ортогональную проекцию. Если мы хотим получить такое же изображение поверхности шара, то нам приходится применять косую ортографическую проекцию, которая и будет в сущности ортогональной проекцией поверхности сферы. При ортографических проекциях точка зрения (глазная точка) удалена в бесконечность, а потому положение плоскости проекций совершенно не влияет на изображение, не изменяя ни способа построения ни масштаба изображения. В виду этого, такая проекция и получила название ортографической, т. е. пряморисующейся. Изобретение ортографической проекции

приписывается Апполонию (греческий геометр, живший за 200 лет до Р. Х.).

Большие и малые круги, проведенные на поверхности данной сферы, изобразятся в ортографической проекции, вообще говоря, эллипсами, причем, только в некоторых частных случаях такие круги изобразятся или прямыми линиями или также кругами.

Для получения изображения круга на шаре, в ортографической проекции, необходимо из каждой точки данной окружности опустить перпендикуляр на плоскость чертежа. Совокупность таких перпендикуляров образует поверхность некоторого цилиндра, а каждый перпендикуляр будет представлять собою производящую этого цилиндра.

Все цилиндры, полученные путем построений таких перпендикуляров, будут или прямыми, или косыми круглыми цилиндрами.

Построение изображений кругов на шаре, в косой ортографической проекции, не представляет никакого затруднения, и здесь мы остановимся только на той связи, которую можно установить между стереографической проекцией данной точки (на поверхности сферы) и ее ортографической проекцией.

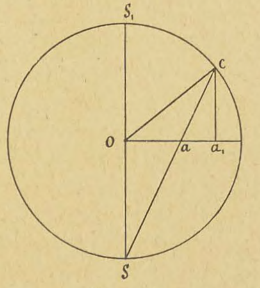


Рис. 120.

Положим, (рис. 120) нам дана стереографическая проекция a некоторой точки на поверхности сферы.

Проводим через центр O основного круга проекций и точку a прямую Oa.

Проводим диаметр SS_1, перпендикулярный Oa.

Соединив прямой точки S_1 и a, находим точку c пересечения этой прямой с основным кругом проекций.

Из точки c опускаем перпендикуляр ca_1 на линию Oa_1. Точка a_1 и будет ортографической проекцией точки шара, изображающейся в стереографической проекции точкой a.

Положим:

$$\angle S_1 Oc = \angle Oca_1 = \alpha; \quad OS = Oc = 1.$$

Из прямоугольного треугольника aOS находим:

$$Oa = OS \cdot \operatorname{tg} \angle OSa = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

а из прямоугольного треугольника ca_1O имеем:

$$Oa_1 = Oc \cdot \sin \angle Oca_1 = \sin \alpha.$$

Таким образом, расстояние стереографической проекции точки на шаре от центра основного круга проекций равно тангенсу половинного угла между диаметром, перпендикулярным к плоскости проекций и диаметром, проходящим через данную точку на сфере. Расстояние же от центра O основного круга проекций до ортографической проекции данной точки равно синусу того же угла α.

IV. СТРОЕНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА.

1. СТРУКТУРА КРИСТАЛЛОВ.

Из общего свойства кристаллического вещества, о котором уже было упомянуто выше и которое мы назвали кристаллической однородностью, можно сделать вполне определенный вывод о строении кристаллов. В самом деле, кристаллической однородностью может обладать только такое вещество, которое состоит из одинаковых частей, находящихся между собой в параллельном положении.

Каждую такую часть, совершенно независимо от того, что она сама по себе представляет, мы можем рассматривать как некоторый центр, из которого по всем направлениям исходят различные силы, ослабевающие по мере того, как мы будем удаляться от исходной частицы. Если эти силы направлены от каждой частицы в окружающее ее пространство, то, в случае присутствия нескольких частиц, мы всегда можем найти такую поверхность, или такие поверхности, вокруг каждой частицы, на которых силы, исходящие из данной частицы, будут нейтрализоваться противоположными силами, исходящими из других ближайших частиц. Назовем такие ней-

тральные силовые поверхности нулевыми и заметим, что нулевые поверхности будут ограничивать сферу действия каждой отдельной частицы.

Если мы будем рассматривать все пространство, занятое кристаллическими частицами, то это пространство можно представить себе разделенным на участки, ограниченные нулевыми поверхностями, причем каждый такой участок будет содержать только одну кристаллическую частицу и будет находиться в параллельном положении со всяким другим соответствующим ему участком. Таким образом, сферы действия частиц, ограниченные нулевыми поверхностями, дадут нам систему геометрических тел, выполняющих пространство без промежутков и находящихся в параллельном положении друг относительно друга. Такие геометрические тела называются параллелоэдрами.

Представим себе, что некоторая неопределенно большая часть пространства выполнена какими-нибудь параллелоэдрами. Если наблюдатель находится сначала внутри одного из таких параллелоэдров, а затем переместится в соседний, то, в виду полного тождества этих параллелоэдров и их одинакового расположения в пространстве, этот наблюдатель совершенно не заметит своего перемещения. Отметим исходное тело, в котором первоначально помещался наблюдатель, цифрой 0.

В системе параллелоэдров это тело со всех сторон окружено точно такими же телами. С каждым из них оно имеет некоторую общую поверхность, которую мы будем называть гранью параллелоэдра. После перемещения наблюдателя в соседний параллелоэдр, который мы обозначим цифрой 1, грань, бывшая первоначально впереди наблюдателя, когда он находился в теле 0, окажется теперь сзади него, а впереди будет находиться, вполне тождественная с ней, новая грань, которая теперь должна иметь такое же положение относительно наблюдателя, какое раньше имела грань, оставшаяся позади. Это может быть только в том случае, когда обе грани будут равны и параллельны друг другу. На основании этого ясно, что каждый параллелоэдр ограничен попарно равными и параллельными гранями. Поэтому, число граней параллелоэдра будет всегда четное.

Предположим, что наблюдатель, находящийся внутри параллелоэдра 0, будет последовательно перемещаться по определенному направлению и постепенно проходить параллелоэдры 1, 2, 3, 4 и т. д. При таком перемещении, наблюдатель встретит в каждом новом параллелоэдре то же самое, что он имел и в соседнем параллелоэдре. Путь наблюдателя будет находиться внутри ряда параллелоэдров, расположенных по прямой линии и образующих, так называемую, колонну параллелоэдров.

Каждый параллелоэдр системы представляет собой тело, входящее в состав нескольких колонн, имеющих различное положение в пространстве. Каждой такой колонне соответствует определенная пара граней.

Число колонн, для которых данный параллелоэдр является общим, равно числу пар граней этого параллелоэдра.

Если в пространстве имеется две непараллельных колонны параллелоэдров, то эти колонны непременно должны пересекаться в одном параллелоэдре, общем обоим колоннам. В случае, если нам даны две колонны, мы можем вполне точно определить положение данного параллелоэдра, отметив каждый параллелоэдр каждой колонны двумя цифрами.

Одна из этих цифр будет отмечать одну колонну, в состав которой входит данный параллелоэдр, а другая — другую. Таким образом, каждая колонна будет отмечена одной и той же цифрой. Параллелоэдр, общий обоим взятым колоннам, отметим цифрами 00, причем это обозначение мы назовем символом исходного параллелоэдра.

Пусть одна из взятых колонн горизонтальная — ab, а другая вертикальная — cd (рис. 121). Отметим колонну ab цифрою 0 на первом месте в символе каждого параллелоэдра, входящего в состав этой колонны.

Колонну cd обозначим той же цифрой 0, но поставленною на втором месте в символе каждого параллелоэдра этой колонны. При таком обозначении, первая цифра для всех параллелоэдров колонны ab будет 0, а вторая будет меняться от $-\infty$ до $+\infty$ в зависимости от числа параллелоэдров, пройденных, начиная с параллелоэдра 00, по этой колонне в положительном или отрицательном направлении. Что ка-

сается параллелоэдров колонны *cd*, то для них, наоборот, постоянной будет вторая цифра в символе каждого параллелоэдра колонны, а первая цифра будет переменной.

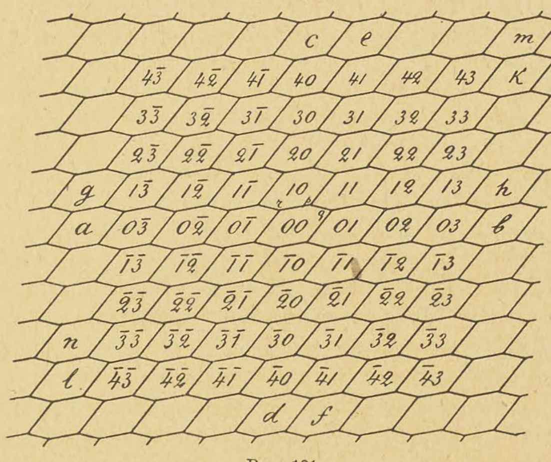


Рис. 121.

Приняв такие обозначения, будем переходить, начиная с параллелоэдра 00, к смежным параллелоэдрам колонны *ab*, двигаясь от *a* к *b*.

При таком передвижении, мы последовательно встретим параллелоэдры 01, 02, 03 и т. д. Идя в обратном направлении по той же колонне, найдем параллелоэдры $0\bar{1}$, $0\bar{2}$, $0\bar{3}$ и т. д. Передвигаясь по колонне *cd* кверху, мы найдем параллелоэдры 10, 20, 30 и т. д. При передвижении книзу, встретим параллелоэдры $\bar{1}0$, $\bar{2}0$, $\bar{3}0$ и т. д.

Каждый из параллелоэдров колонны *ab*, в свою очередь, входит в состав колонны, параллельной колонне *cd*. Взяв параллелоэдр 01, мы выведем из него колонну *ef*, смежную и параллельную колонне *cd*. Точно также, из параллелоэдра 10 выведем колонну *gh*, смежную и параллельную колонне *ab*.

Выведя из параллелоэдров колонны *ab* все колонны, параллельные *cd*, а из параллелоэдров этой последней колонны —

все колонны, параллельные ab, мы получим в общей сложности из всех колонн слой параллелоэдров. Такой слой будет делить всю систему параллелоэдров, выполняющих пространство, на две части, не имеющие между собой ни одного общего параллелоэдра.

Совершенно очевидно, что каждый параллелоэдр в слое отграничивается от смежных с ним параллелоэдров несколькими парами граней, как например параллелоэдр 10 на рис. 121. Эти грани пересекаются друг с другом в параллельных ребрах, которые, вообще говоря, могут и не быть прямыми линиями. Общая совокупность таких граней параллелоэдра, которые могут быть и не плоскими, называется поясом граней, по аналогии с поясом граней многогранника.

Так как к каждой грани данного параллелоэдра примыкает смежный с ним параллелоэдр, а каждые два параллелоэдра определяют колонну, причем для определения слоя необходимо иметь только две колонны, то мы можем сказать, что каждый пояс параллелоэдра вполне определяет некоторый слой.

Таким образом, несколько слоев в системе параллелоэдров, определяемые различными поясами одного и того же параллелоэдра, пересекаются между собой в этом параллелоэдре, который и будет единственным параллелоэдром, входящим в состав всех этих слоев. Каждый слой параллелоэдров делится данной колонной этого слоя на две части, причем между параллелоэдрами одной части и параллелоэдрами другой не может быть ни одной общей точки. Таким образом, если (рис. 121) параллелоэдр 00 слоя соприкасается с параллелоэдром 11 того же слоя по грани pq, то этими двумя параллелоэдрами определяется колонна kl.

Если с параллелоэдром 00 соприкасается параллелоэдр 10 по грани rp, то, приняв параллелоэдр 10 за исходный, выведем смежную и параллельную kl колонну mn, в состав которой будут входить параллелоэдры $0\bar{1}$, 21, 32 и т. д.

Параллелоэдры $1\bar{1}$ и 00 отделены друг от друга колонной mn и, следовательно, не могут иметь общих точек.

Колонны ab и gh будут смежными и параллельными между собой. Точно также смежными и параллельными будут ко-

лонны *kl* и *mn*. Параллелоэдр 00 входит в состав колонн *ab*, *cd* и *kl*, причем он имеет грани, общие с шестью параллелоэдрами 10, 11, 01, $\bar{1}0$, $\bar{1}\bar{1}$, $0\bar{1}$. Кроме этих параллелоэдров, ближайшими к параллелоэдру 00 будут параллелоэдры $\bar{1}1$ и $1\bar{1}$. Но, как мы видели, с параллелоэдром $1\bar{1}$ взятый нами параллелоэдр 00 не может иметь ни одной общей точки, также и с параллелоэдром 11, который отделен от параллелоэдра 00 колонной $\bar{1}0$, 01, 12 и т. д. Из этих рассуждений вытекает весьма важный вывод, который можно формулировать так:

Параллелоэдр может входить в состав не более как трех колонн одного и того же слоя. Так как каждая колонна слоя определяется двумя параллельными гранями, а самый слой поясом граней параллелоэдра, то пояс параллелоэдра не может состоять более, чем из трех пар параллельных граней.

В частном случае, пояс параллелоэдра может состоять только из двух пар параллельных граней, как напр., пояса каждого параллелепипеда, который, очевидно, может служить параллелоэдром некоторой системы.

Выделив из системы параллелоэдров какой-нибудь слой, пересечем его плоскостью, проходящей через соответственные точки параллелоэдров этого слоя. Такая плоскость пересечет грани параллелоэдров слоя по некоторым линиям, причем каждая такая линия будет иметь себе равную и параллельную. В результате, мы получим на плоскости систему равных фигур, выполняющих плоскость без промежутков. Эти фигуры называются параллелогонами и могут быть или с четыреугольными очертаниями — дипараллелогоны, или с шестиугольными очертаниями — трипараллелогоны. Таким образом, пояса граней параллелоэдра будут или дипараллелогональны или трипараллелогональны.

В виду того, что каждое ребро параллелоэдра служит осью некоторого первичного пояса, каждая грань параллелоэдра представляет собою некоторый параллелогон. Каждая пара параллельных граней параллелоэдра определяет некоторую колонну. Каждые две пары параллельных граней определяют некоторый пояс граней параллелоэдра, причем каждый

пояс параллелоэдра, в свою очередь, определяет некоторый слой.

Если грань параллелоэдра имеет *n* пар сторон и каждая такая сторона служит одним из параллельных ребер первичного пояса, то количество поясов, пересекающихся в данной грани, будет равно *n*. Таким образом, каждую пару параллельных граней параллелоэдра, мы можем рассматривать как элемент пересечения нескольких первичных поясов. Так как каждый пояс определяет слой, то мы можем построить *n* слоев так, чтобы в состав этих слоев входила колонна, определяемая двумя равными и параллельными гранями параллелоэдра, имеющими каждая по *n* пар сторон. При таком построении, эта колонна будет колонной пересечения *n* слоев системы. Взяв какой-нибудь слой системы, пересекающий эту колонну и содержащий в себе данный параллелоэдр, мы увидим, что этот слой определяет некоторый пояс данного параллелоэдра, и будет пересекать *n* слоев, содержащих данный параллелоэдр. Это может быть только в том случае, если данный параллелоэдр имеет пояс, содержащий 2*n* граней. Так как пояса параллелоэдров могут быть только ди — или трипараллелогональны, то *n* будет равно 2 или 3. Отсюда мы непосредственно выводим, что грани параллелоэдра могут быть только или четыреугольники, или шестиугольники.

Возьмем в системе параллелоэдров два, непараллельные между собой, слоя. Эти два слоя должны пересекаться друг с другом в некоторой колонне, т. е. иметь одну общую колонну. Каждый параллелоэдр этой общей колонны будет входить в состав, по крайней мере, двух колонн в каждом из пересекающихся слоев, причем за одну из таких колонн мы примем колонну, общую двум слоям, т. е. ту колонну, в которой пересекаются два произвольно взятых слоя системы.

Таким образом, в пространственной системе каждый параллелоэдр будет общим, по крайней мере, трем колоннам. В самом деле, в каждом слое данный параллелоэдр может входить в состав или двух, или трех колонн, а в двух слоях

этот параллелоэдр может быть общим или трем, или четырем, или, наконец, пяти колоннам.

Принимая некоторый параллелоэдр пространственной системы за исходный, мы можем определить положение каждого параллелоэдра системы, отметив его символом, состоящим из трех цифр, Символ исходного параллелоэдра будет в таком случае 000.

Каждый параллелоэдр должен иметь несколько поясов, так как один пояс граней не может образовать замкнутой пространственной фигуры. Обозначим количество дипараллелогональных поясов параллелоэдра буквой p_2, а количество трипараллелогональных p_3. Тогда общее количество всех поясов параллелоэдра $p = p_2 + p_3$.

Точно также, для общего количества f граней параллелоэдра, мы можем написать выражение $f = f_2 + f_3$, где f_2 количество граней с двумя парами параллельных сторон, а f_3 количество граней с тремя парами сторон. Если мы сосчитаем количество пар граней в каждом поясе параллелоэдра, то в дипараллелогональном поясе таких пар граней будет, очевидно, две, а в трипараллелогональном 3. Так как число дипараллелогональных поясов параллелоэдра равно p_2, а трипараллелогональных p_3, то, при таком подсчете, мы получим как сумму $2p_2 + 3p_3$. Заметив, что при этом подсчете каждая грань с двумя парами параллельных сторон была сосчитана 2 раза, так как она вошла в состав двух поясов, а грань с тремя парами сторон сосчитана три раза, выводим следующее соотношение:

$$2p_2 + 3p_3 = 2f_2 + 3f_3. \qquad (1)$$

Если мы возьмем какой-нибудь пояс, то мы можем подсчитать во скольких гранях пересекут его все остальные пояса. Если бы все грани взятого пояса имели по две пары сторон, то в каждой паре граней взятого пояса его мог бы пересечь только один пояс. При этом условии, число поясов, пересекающих взятый пояс, т. е. $p - 1$, было бы равно числу граней этого пояса. Если в состав пояса будут входить грани с тремя парами сторон, то в этих гранях данный пояс будет пересекаться с двумя поясами. В этом случае, число граней

6*

исходного пояса будет меньше числа пересекающих его поясов.

Для того, чтобы количество граней пояса снова стало равно $p - 1$, необходимо умножить на 2 число граней исходного пояса, имеющих по три пары параллельных сторон. Взяв общую сумму, полученную для всех поясов, мы находим:

$$p(p-1) = 2f_2 + 2 \cdot 3f_3. \qquad (2)$$

В самом деле, в состав общей суммы $p(p-1)$ каждая грань с двумя парами сторон войдет два раза, а каждая грань с тремя парами сторон, как только что было указано, шесть раз.

Вычтя из выражения (2) равенство (1), находим:

$$3f_3 = (p-3)p - p_3 \qquad (3)$$

При всех вышеизложенных рассуждениях мы рассматривали параллелоэдр, как некоторое тело, ограниченное неопределенными поверхностями. Как частный случай, мы можем рассматривать такой параллелоэдр, грани которого представляют собою плоскости, а ребра, следовательно, прямые линии. Другими словами, мы можем за параллелоэдр принять всякий многогранник, выполняющий пространство без промежутков при своем повторении в параллельном положении. Имея систему таких параллелоэдров, мы можем всегда заменить каждую плоскую грань, взятого нами параллелоэдра, некоторой кривой поверхностью. Произведя такую замену всех, не параллельных друг другу, плоских граней параллелоэдра, мы изменим его обьем, что для каждой грани выразится прибавлением или отнятием некоторого тела, ограниченного с одной стороны плоскостью, а с другой — взятой кривой поверхностью. Если мы прибавим к одной, какой-нибудь, плоской грани параллелоэдра такое тело, то для того, чтобы измененный таким образом многогранник, все-таки, остался параллелоэдром, мы должны будем отнять от него такое же тело, со стороны параллельной грани.

Проделав такие прибавления и отнятия для всех плоских граней параллелоэдра, мы, в результате, получим параллелоэдр того же обьема и с тем же количеством граней и ребер,

как и взятый параллелоэдр с плоскими гранями. В виду этого, многогранники с плоскими гранями, выполняющие в параллельном положении пространство без промежутков мы будем называть первичными параллелоэдрами, а все остальные, выводимые из них, — вторичными. Итак, первичный параллелоэдр есть некоторый многогранник с плоскими гранями. Мы будем называть типическим первичным параллелоэдром такой первичный параллелоэдр, который можно описать вокруг шара или вписать в некоторый шар.

2. ВЫВОД ТИПИЧЕСКИХ ПЕРВИЧНЫХ ПАРАЛЛЕЛОЭДРОВ.

Как было доказано, грани таких многогранников могут быть только или четыреугольники, или шестиугольники. Так как, вообще, не может существовать многогранника, у которого все грани были бы шестиугольниками, то в каждом параллелоэдре непременно должна быть хотя бы одна пара четыреугольных граней. Назовем такую пару четыреугольных граней основными. Кроме того, назовем основными также и оба пояса, пересекающихся в этих гранях. Один из основных поясов мы и примем за исходный для дальнейших выводов.

Так как, вообще, всякий пояс параллелоэдра может быть только четырехгранным, или шестигранным, то и исходный пояс должен удовлетворять этому общему правилу.

Если исходный пояс четырехгранный, то в нем, кроме оснований, имеется всего одна пара боковых граней, причем эти грани могут быть или одинаковыми четыреугольниками или шестиугольниками. Таким образом, мы можем иметь:

I. Исходный пояс четырехгранный и боковые грани — четыреугольники.

При таком условии получаются всего три пояса, т. е. $p = 3$, откуда $p(p-1) = 6$.

Из выражения (2) находим: $f_3 = O$ и $f = f_2 = 3$.

Из выражения (3) получаем: $p_3 = O$.

Таким образом, при этом условии, мы получаем параллелоэдр с тремя парами параллельных граней, так называемый

трипараллелоэдр. Каждая грань трипараллелоэдра — некоторый четыреугольник. Первичный параллелоэдр — некоторый параллелепипед.

Типическим первичным параллелоэдром в этом случае будет куб (рис. 122), так как его можно и вписать в шар и описать около шара. Многогранники, обладающие таким свойством, вообще, называются мезосферическими.

II. Исходный пояс четырехгранный, а боковые грани — шестиугольники.

При этом условии получаем всего четыре пояса, т. е. $p = 4$, откуда $p(p-1) = 12$. Из выражения (2) находим: $f_3 = 1$, т. е. имеется только одна пара шестиугольных граней, а именно, взятые нами боковые грани исходного пояса.

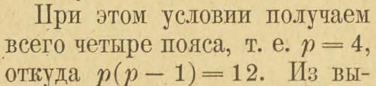


Рис. 122.

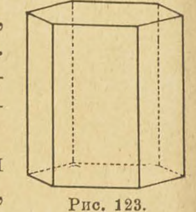


Рис. 123.

В виду этого: $f_2 = 3$ и $f = f_2 + f_3 = 4$. Из формулы (1) находим: $2p_2 + 3p_3 = 9$. Так как $p = 4$, то $p_3 = 1$. Выведенный параллелоэдр, как мы видели, имеет 4 пары параллельных граней, а потому он называется тетрапараллелоэдром. Одна пара граней этого параллелоэдра шестиугольники, а три другие пары параллельных граней — четыреугольники.

Типическим первичным параллелоэдром в этом случае будет служить, вообще, комбинация гексагональной призмы и пинакоида, так как всякую такую комбинацию можно вписать в шар. Среди этих комбинаций имеется единственная, которая является мезосферическим многогранником (рис. 123).

Если исходный пояс шестигранный, то в нем, кроме двух основных, имеются еще две пары граней. Относительно этих граней мы можем сделать следующие три допущения. 1) Обе пары граней четыреугольны. 2) Одна пара четыреугольна, а другая шестиугольна. 3) Обе пары шестиугольны.

III. Исходный пояс шестигранный, причем все грани этого пояса — четыреугольники.

При этом условии мы можем сделать два предположения:

1) В составе граней параллелоэдра имеются шестиугольники. При таком предположении мы выведем опять тетра-

параллелоэдр, так что этот случай будет совершенно аналогичен с II.

2) Все грани параллелоэдра четыреугольники. В этом случае мы будем, следовательно, иметь: $f_3 = O$, $p = 4$. Из формулы (2) находим: $f_2 = 6$ и, следовательно, $f = 6$. Так как в нашем случае из формул (1) и (2) мы получаем: $p(p-1) = 2p_2 + 3p_3$, причем $p = 4$, то p_2 должно быть равно нулю и в таком случае $p_3 = 4$, т. е. все пояса параллелоэдра шестигранны. Выведенный параллелоэдр с шестью парами параллельных граней называется гексапараллелоэдром.

Первичным параллелоэдром, в этом случае, может быть комбинация тетрагональной призмы и дипирамиды дитетрагонально-дипирамидального вида симметрии, причем грани призмы и дипирамиды будут перпендикулярны различным плоскостям симметрии, проходящим через четверную ось.

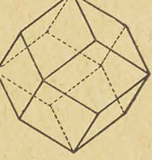


Рис. 124.

Типическим первичным параллелоэдром для этого случая будет служить ромбический додекоэдр, в который, как известно, можно вписать шар (рис. 124).

IV. Исходный пояс шестигранный, причем в этом поясе имеется только одна пара шестиугольных граней.

В этом случае $p = 5$, следовательно, кроме двух основных поясов в параллелоэдре имеется еще три первичных пояса, в состав которых не входят основные грани. Из этого мы заключаем, что боковые грани обоих основных поясов должны быть: одна шестиугольная, а другая четыреугольная.

В самом деле, в виду того, что $p = 5$, каждый пояс должен пересечься с 4-мя поясами. Так как пояс не может содержать восьми пар граней, то для такого пересечения необходимо, чтобы одна пара параллельных граней пояса была бы шестиугольной. Из этого мы заключаем, что f_3 не меньше 2. Кроме того, по условию, f_2 не меньше 3. Так как $p(p-1) = 20$, то на основании формулы (2) заключаем, что $f_3 = 2$ и $f_2 = 4$. Кроме того, на основании формул, мы выводим: $p_3 = 4$ и $p_2 = 1$. Наконец, находим: $f = f_2 + f_3 = 6$. Таким образом, выведенный параллелоэдр будет с шестью парами граней т. е. опять гексапараллелоэдр, отличающийся

от уже ранее выведенного гексапараллелоэдра только тем, что в состав его граней будут входить шестиугольники.

Первичным параллелоэдром, в этом случае, может служить совершенно аналогичная комбинация тетрагональной призмы и тетрагональной дипирамиды, как и для рассмотренного ранее гексапараллелоэдра. Разница будет только в расстоянии вершин, пересекающихся в L^4, которое в рассматриваемом случае будет больше, чем в случае III. Таким образом, такой удлиненный гексапараллелоэдр мы можем рассматривать, как несущественное видоизменение гексапараллелоэдра, рассмотренного в пункте III. В виду этого, за типический первичный параллелоэдр, для этого случая, мы должны принять также ромбический додекоэдр, рассматривая его боковые грани как шестиугольники, у которых длины одной пары ребер равны нулю.

V. Исходный пояс шестигранный, причем, кроме основных, все грани этого пояса шестиугольники.

В этом случае, боковые грани обоих основных поясов должны быть шестиугольники, так как $p = 6$. Из выражения (2) мы находим: $p(p - 1) = 30 = 2f_2 + 6f_3$, где f_3 не меньше 4; f_3 не может быть и больше 4, так как при $f_3 = 5$ количество f_2 равнялось бы нулю, что противоречит условию. Таким образом, $f_3 = 4$ и $f_2 = 3$, откуда $f = 7$, а отсюда $p_3 = 6$, а $p_2 = O$.

Выводящийся параллелоэдр с семью парами параллельных граней называется гептапараллелоэдром.

Типическим первичным параллелоэдром, для этого случая, будет комбинация куба и октаэдра совершенно определенного вида. В этой комбинации грани куба притупляют четырехгранные углы октаэдра, таким образом, что каждое ребро октаэдра делится ровно на три части и одна треть отсекается гранью куба. В результате, мы получаем такой параллелоэдр, гранями которого служат 6 квадратов и 8 правильных шестиугольников, причем эта комбинация может быть вписана в шар (рис. 125).

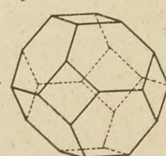


Рис. 125.

3. ВИДЫ И ТИПЫ СТРУКТУРЫ.

Каждый тип параллелоэдра определяет собою некоторый вид структуры. Таким образом, мы имеем четыре возможных вида структуры: 1) гексаэдрический, 2) призматический, 3) додекаэдрический и 4) октаэдрический. Название этих видов структуры взято от наименования первичного типического параллелоэдра, характеризующего вид структуры.

Рассматривая типические первичные параллелоэдры с точки зрения их симметрии, мы видим, что три из этих параллелоэдров, а именно три-, гекса- и гептапараллелоэдр, относятся к дитриоктаэдрическому виду симметрии и характеризуются, следовательно, формулой $3\,L^4\,4\,L^3_6\,6\,L^2\,9\,P$. Что касается первичного типического тетрапараллелоэдра, то его симметрия будет выражаться формулой $L^6\,6\,L^2\,7\,P$ и он, следовательно, будет относиться к дигексагонально-дипирамидальному виду симметрии.

В виду этого, мы можем различать два типа структуры: 1) кубический тип с тремя видами структуры: a) гексаэдрическим, b) додекаэдрическим и c) октаэдрическим и 2) гипогексагональный тип с одним единственным призматическим видом структуры.

Как мы уже видели, виду симметрии $3\,L^4\,4\,L^3_6\,6\,L^2\,9\,P$ подчинены все виды симметрии моногональной, дигональной, тригональной и тетраэдро-октаэдрической симметрических систем, а кроме того, еще 5 видов симметрии тетрагональной системы, не содержащих L^4_8. С другой стороны, виду симметрии $L^6\,6\,L^2\,7\,P$ также подчинены все виды симметрии моногональной, дигональной и тригональной симметрических систем. Кроме того, этому виду симметрии подчинены 5 видов симметрии гексагональной симметрической системы, не содержащих L^6_{12}.

Если мы подвергнем одной или нескольким гомогенным деформациям данный типический первичный параллелоэдр, то, в результате, получим некоторый, уже не типический, первичный параллелоэдр, по внешней симметрии подчиненный взятому типическому параллелоэдру. Такие параллелоэдры будут характеризовать строение кристаллов, имеющих меньшее

количество элементов симметрии, сравнительно с кристаллами, характеризующимися типическими параллелоэдрами. Кроме того, заметим, что из самого определения понятия о параллелоэдре, каждый типический параллелоэдр должен иметь центр обратного равенства. В самом деле, во всяком параллелоэдре мы можем совместить друг с другом две равные параллельные грани, или 1) просто произведя поступательное движение одной грани по направлению к другой, или 2) сначала произведя поворот одной данной грани в ее плоскости на 180° и затем уже сделав ее перемещение по направлению к другой данной грани. Такими свойствами будут обладать только фигуры, имеющие центр обратного равенства. Из этого соображения мы выводим совершенно определенное заключение о возможных видах симметрии первичных параллелоэдров. Это будут только те виды симметрии, которые имеют центр обратного равенства. В виду того, что мы можем совместить равные грани первичного параллелоэдра при помощи простого поступательного движения, мы заключаем, что каждая грань параллелоэдра будет иметь себе не только обратно, но и прямо равную грань.

4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РЕШЕТКИ.

Положим, нам дана некоторая часть пространства, заполненная параллелоэдрами т. е. некоторая система параллелоэдров. От каждого параллелоэдра системы в различных направлениях тянутся колонны параллелоэдров, причем каждая такая колонна характеризуется определенным направлением. Выберем одну из таких колонн и отметим какую-нибудь точку внутри одного из параллелоэдров этой колонны.

В виду полного тождества всех параллелоэдров, мы можем найти внутри каждого из них такую точку, которая будет расположена относительно элементов, содержащего ее параллелоэдра, точно так же, как и выбранная нами точка внутри первого параллелоэдра. Такие точки мы будем называть гомологическими.

Если мы возьмем внутри каждого параллелоэдра колонны точку, гомологическую по отношению к некоторой точке,

взятой произвольно внутри одного из параллелоэдров колонны, то мы можем вывести бесконечный ряд гомологических точек, причем каждая точка будет находиться внутри колонны. Все точки такого ряда будут лежать на одной прямой линии, причем расстояние между двумя ближайшими гомологическими точками ряда будет одинаково, какие бы мы две точки ни взяли. Это расстояние называется промежутком или параметром ряда и будет соответствовать расстоянию между двумя гранями параллелоэдра, пересекающими прямую, проведенную через точки ряда, если только эти грани будут перпендикулярны к проведенной прямой.

Рассмотрим какой-нибудь слой пространственной системы параллелоэдров. Примем один из параллелоэдров этого слоя за исходный. Взяв некоторую точку внутри исходного параллелоэдра, мы можем получить гомологические точки во всех параллелоэдрах того же слоя. Выведя такие точки, мы увидим, что все они будут лежать в одной плоскости. В самом деле, по какому бы пути мы ни следовали от одной точки к другой, мы не выйдем из плоскости, определяемой двумя рядами гомологических точек, соответствующими двум колоннам данного слоя, пересекающимся в исходном параллелоэдре. Такая система гомологических точек на плоскости называется плоской сеткой.

Возьмем три, ближайшие друг другу гомологические точки плоской сетки и проведем через них прямые линии, приняв одну из взятых точек за точку пересечения двух прямых. Каждая такая прямая определит ряд гомологических точек. Проведя через каждую точку первого ряда линию, параллельную второму ряду, а через каждую точку второго ряда прямую, параллельную первому ряду, получим систему параллелограммов на плоскости. В каждой вершине каждого параллелограмма системы будет находиться одна из гомологических точек данной плоской сетки. Длины двух непараллельных сторон каждого параллелограмма c_1 и c_2 будут в то же время и длинами промежутков соответственных рядов.

Заменив все параллелоэдры системы гомологическими точками, мы получаем пространственную систему точек, располо-

женных с определенной правильностью. Такая система называется пространственной решеткой.

Выбрав произвольную гомологическую точку пространственной решетки, мы можем найти ближайшие к ней три гомологические точки, причем возьмем эти точки так, чтобы взятые нами четыре точки, считая и произвольно выбранную, не лежали в одной плоскости. Проведем через исходную точку и каждую из трех найденных прямую линию. Эти три прямые определят три ряда пространственной решетки с промежутками c_1, c_2 и c_3, причем эти промежутки, по условию, будут наименьшими в данной пространственной решетке.

Проведя из каждой точки пространственной решетки ряды, параллельные трем найденным рядам, мы выведем систему некоторых параллелепипедов, ребра которых будут наименьшими из возможных промежутков ряда. Такие параллелепипеды называются элементарными основными параллелепипедами данной пространственной решетки.

В каждой вершине основного элементарного параллелепипеда будет находиться одна гомологическая точка пространственной решетки, причем, по условию построения такого параллелепипеда, внутри его не может быть ни одной гомологической точки.

Ясно, что для всякой пространственной решетки может быть найден только один элементарный основной параллелепипед и, таком образом, этот параллелепипед будет вполне определять вид данной решетки.

Переходя от параллелоэдров к пространственным решеткам, мы можем вывести заключение, что в основе строения каждого кристаллического вещества лежит некоторая определенная пространственная решетка, состоящая из гомологических точек, и представляющая собой геометрическую схему строения данного кристалла.

Каждую пространственную решетку мы можем рассматривать как некоторую систему элементарных параллелепипедов, или ячеек. В виду этого, теория строения кристаллического вещества, основанная на рассмотрении свойств таких про-

странственных решеток, называется ретикулярной теорией строения (от латинского слова reticulum — ячейка).

Если мы будем рассматривать каждую гомологическую точку пространственной решетки, как некоторую материальную частицу, то, с такой точки зрения, каждая грань кристаллического многогранника будет представлять собою некоторую плоскую сетку данной пространственной решетки, а каждое ребро — некоторый ряд гомологических точек той же решетки. С другой стороны, каждая плоская сетка пространственной решетки может появиться в виде определенной грани кристалла, т. е. при известных условиях, говоря теоретически, будет представлять собою одну из частей поверхности ограничения данного кристаллического многогранника.

В виду этого, каждая плоская сетка пространственной решетки может быть названа возможной гранью кристалла, а каждый ряд — возможным ребром.

Совокупность всех возможных для данного кристаллического вещества граней и ребер, вне зависимости от их взаимного расположения, называется комплексом граней и ребер данного кристалла.

Итак мы видим, что ретикулярная теория строения кристаллического вещества заключает в себе понятие о правильных системах точек, или пространственных решетках, являющихся по своему существу безграничными математическими образами. Принимая ретикулярную теорию структуры, мы можем рассматривать каждый кристалл, идеально образованный с точки зрения проявления его симметрии, как некоторую часть пространственной решетки, ограниченную определенным количеством рациональных граней, представляющих собою плоские сетки данной решетки.

Если мы представим себе, что такой идеально образованный кристалл ограничен полной совокупностью возможных граней и ребер, то мы будем называть полученный геометрический образ „кристаллическим комплексом“ или просто „комплексом“, рассматривая его, как некоторую неопределенную часть пространственной решетки. Симметрию комплекса мы назовем комплексиальной симметрией. Понятие

„кристаллического комплекса“ не следует смешивать с понятием „комплекса граней и ребер,“ приведенного выше.

Если отвлечься от представления о внутреннем строении кристаллического комплекса и рассматривать только его внешнюю форму, то такая форма, вообще говоря, будет представлять собою некоторый эллипсоид, который можно назвать „комплексиальным эллипсоидом“.

5. ЗОНЫ (ПОЯСА) КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ.

Поясом, или зоной граней кристаллического комплекса, мы называем совокупность граней, возможных для данного комплекса и пересекающихся в параллельных ребрах.

С точки зрения строения кристаллического вещества, такой пояс граней будет представлять собою совокупность плоских сеток, определяемую каким-нибудь, произвольно взятым, рядом гомологических точек данной решетки. Такой ряд будет называться осью пояса. Ясно, что ось пояса будет всегда возможным ребром кристалла.

Если в поясе граней существует две возможные взаимноперпендикулярные грани, то пояс называется ортогональным. Если в поясе имеется для каждой грани возможная, перпендикуларная к ней грань, то пояс называется изотропным. Пояса, в которых нет взаимно-перпендикулярных возможных граней, называются анортогональными.

Ребровым поясом кристаллического комплекса мы называем совокупность возможных ребер, параллельных некоторой плоскости, которую мы называем гранью ребрового пояса. С точки зрения структуры кристаллов каждое возможное ребро есть ряд гомологических точек пространственной решетки. Следовательно, ребровой пояс мы можем рассматривать, как совокупность всех рядов некоторой плоской сетки, пересекающихся в одной из гомологических точек той же сетки.

Аналогично с поясами граней мы различаем ортогональные, изотропные и анортогональные ребровые пояса.

При рассмотрении теории строения кристаллического вещества было указано, что каждая возможная грань кристалла есть одна из плоских сеток пространственной решетки. Кроме

того, в каждой плоской сетке мы можем провести через какие угодно две гомологические точки некоторый ряд, представляющий собою возможное ребро данного кристалла. Каждая возможная грань кристалла, таким образом, будет гранью некоторого ребрового пояса.

С другой стороны, взяв какой-нибудь определенный ряд гомологических точек пространственной решетки и еще одну гомологическую точку той же решетки, находящуюся вне этого рода, мы выведем некоторую плоскую сетку. Все выведенные при помощи такого построения плоские сетки будут иметь общие гомологические точки, расположенные на взятом нами произвольном ряде, т. е. этот ряд будет линией пересечения всех плоских сеток пространственной решетки.

Так как каждый ряд гомологических точек мы можем назвать возможным ребром, а каждую плоскую сетку возможной гранью, то, из только что приведенного рассуждения, мы можем сделать такой вывод: каждое возможное ребро кристалла представляет собою линию пересечения бесконечно большого количества возможных граней. Если некоторые из таких граней будут служить поверхностью ограничения данного кристаллического многогранника, то все они будут пересекаться между собой по ребрам, параллельным взятому ряду гомологических точек. Таким образом, каждое возможное ребро кристаллического комплекса будет представлять собою ось некоторого пояса граней.

Выведя все возможные кристаллические ребра и найдя соответствующие им пояса граней кристаллического комплекса, мы увидим, что в каждой грани комплекса будет пересекаться несколько поясов граней и, следовательно, каждый комплекс будет состоять из граней, расположенных по поясам. Всякий многогранник, каждая грань которого входит в состав некоторого пояса граней, называется зоноэдром. В виду этого, мы можем сказать, что всякий кристаллический многогранник будет определенным зоноэдром. В этом и состоит закон зон, или закон Вейсса, называемый так в виду того, что этот закон был установлен в 1804 году немецким кристаллографом Chr. S. Weiss'ом.

6. ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РЕШЕТКИ.

Для построения пространственной решетки, возьмем в пространстве произвольную прямую линию. Отметим на этой прямой две точки a_0 и a_1. Положим, расстояние между этими точками будет c_1, представляющее собою при нашем построении отрезок взятой прямой $a_0 a_1$. Начиная от точки a_0 в одну сторону, и от точки a_1 в другую, отложим на взятой прямой бесконечное множество отрезков c_1, каждый раз отмечая начальную и конечную точку такого отрезка. В результате такого построения получим некоторую прямую с отмеченными на ней точками, находящимися на равных расстояниях друг от друга. Прямолинейная система таких равноотстоящих точек образует первый ряд гомологических точек, а соединяющая их прямая будет представлять собою, так называемую, линию ряда. Расстояние, между двумя ближайшими друг к другу гомологическими точками ряда, будет служить промежутком ряда, или его параметром.

Возьмем второй ряд гомологических точек с таким же параметром и расположим его параллельно первому ряду, причем, положение какой-нибудь гомологической точки первого ряда, относительно некоторой точки второго ряда, может быть выбрано произвольно. Проведем прямую через одну из точек первого ряда. Очевидно, эта прямая и два параллельных друг другу ряда будут вполне однозначно определять некоторую плоскость. Прямую, проведенную через одну из гомологических точек первого ряда и точку второго ряда, мы можем рассматривать, как линию ряда с параметром c_2.

Отметив гомологические точки этого ряда, мы можем провести через каждую такую гомологическую точку прямую, параллельную первому ряду, и на этой прямой построить гомологические точки, находящиеся друг от друга на расстоянии c_1. Все такие ряды будут, очевидно, находиться в одной плоскости, и будут определять собою плоскую сетку пространственной решетки.

Вообще, мы будем называть системой рядов все, параллельные друг другу, ряды пространственной решетки. Ясно, что все ряды одной системы будут иметь одинаковые параметры.

Построим вторую плоскую сетку той же формы и величины, как и построенная нами первоначально. Расположим эту вторую сетку в плоскости, параллельной плоскости первой сетки и находящейся на произвольном расстоянии от первой сетки, так, чтобы ряды гомологических точек второй плоской сетки были расположены параллельно рядам первой сетки, имеющим параметры, равные параметрам рядов второй сетки.

Проведем прямую через одну из точек первой сетки и некоторую точку второй сетки. Эту прямую мы опять можем рассматривать, как ряд гомологических точек с промежутком c_3, равным расстоянию между теми гомологическими точками первой и второй сетки, через которые проведен этот ряд. Отметив на этом ряде все его гомологические точки, и проведя через каждую такую точку плоскую сетку, параллельную двум первым сеткам, с соблюдением условия, чтобы ряды, характеризующиеся одинаковыми параметрами, во всех построенных плоских сетках были параллельны друг другу, т. е. образовали бы систему рядов, получим пространственную решетку.

Назовем все параллельные друг другу плоские сетки с параллельными равными рядами системой плоских сеток.

Приняв такие обозначения, можно сказать, что всякая пространственная решетка представляет собою одновременно и систему рядов и систему плоских сеток. Пространственная решетка, вообще, рассматривается, как бесконечно продолжающаяся по трем измерениям.

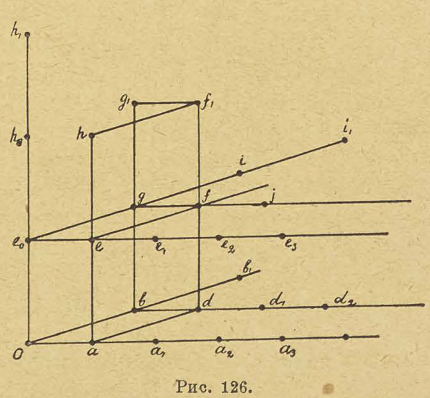


Рис. 126.

Для иллюстрации такого построения, рассмотрим рис. 126, представляющий собою некоторую часть пространственной решетки.

Положим O, a, a_1, a_2 . . . первый ряд гомологических точек; b, d, d_1 . . . второй ряд, параллельный первому и с

тем же параметром $Oa = bd = c_1$. Линия, проведенная через точку O первого ряда и точку b второго ряда образует третий ряд гомологических точек с параметром $Ob = c_2$, непараллельный рядам $O \ldots a_3$ и $b \ldots d_2$.

В таком случае, ряды $O \ldots b_1$ и $O \ldots a_3$ определяют первую плоскую сетку $Oaa_1a_2 \ldots bb_1b_2 \ldots dd_1d_2 \ldots$ Вторая плоская сетка, подобная первой, определяется рядами e_0gii_1 и $e_0ee_1 \ldots$ причем $e_0e = c_1$ и $e_0g = c_2$.

Линия Oe_0h_1 будет также линией ряда гомологических точек. Другие плоские сетки, той же системы сеток, пройдут через точки h_0 и h_1 ряда и будут параллельны сетке $Oaa_1a_2 \ldots bb_1b_2 \ldots$ Ряд $Oe_0h_0h_1 \ldots$ в общем случае отличается от рядов $Oaa_1a_2 \ldots$ и $Obb_1b_2 \ldots$ не только своим направлением, но и параметром, который будет равен $Oe_0 = e_0h_0 = h_0h_1 \ldots = c_3$.

Все гомологические точки пространственной решетки, построенной вышеуказанным способом, будут равнозначны и не будут отличаться одна от другой никакими особенностями в своем относительном положении. Какую бы мы точку решетки ни взяли, конфигурация решетки вокруг этой точки будет та же самая, как и вокруг всякой другой точки, если только принять решетку безграничных размеров.

При рассмотрении свойств пространственной решетки, мы должны различать понятие гомологической точки и просто точки, как математического элемента. В каждом промежутке ряда и во всех местах пространства, занятого решеткой, мы будем иметь математические точки, но только отмеченные нами, определенные точки пространства, будут гомологическими точками решетки. В виду этого, гомологические точки также называются узлами решетки. С точки зрения теории строения кристаллического вещества, каждый узел решетки будет представлять собою, как бы центр тяжести отдельных частиц или атомов.

Мы видели, каким образом возможно построить пространственную решетку. Посмотрим теперь, как найти ряды и плоские сетки, определяющие данную пространственную решетку. Положим, нам дана определенная пространственная решетка, часть которой изображена на рис. 126.

Примем произвольную гомологическую точку O данной решетки за исходную для построения ряда гомологических точек и проведем через эту точку и ближайшую к ней точку a — линию ряда. Продолжим эту линию в обе стороны и возьмем $aa_1 = Oa$, $a_1a_2 = aa_1 \ldots$

Все точки a_1, a_2, $a_3 \ldots$ будут принадлежать той же самой решетке. Такое построение, следовательно, определит один из рядов системы.

Исходя из точки O, возьмем по другому направлению, не совпадающему с направлением Oa, гомологическую точку b, ближайшую к точке O по избранному направлению.

Построим на Oa и Ob параллелограмм $Oadb$, причем точка d будет также одной из гомологических точек решетки. Вообще говоря, внутри такого параллелограмма может находиться некоторое конечное число гомологических точек пространственной решетки, принадлежащих той же плоской сетке. В таком случае, необходимо взять вместо точки b некоторую другую гомологическую точку, находящуюся на минимальном расстоянии от ряда $Oaa_1a_2 \ldots$ Взяв такую точку и построив указанным выше образом параллелограмм, мы уже не найдем внутри такого параллелограмма ни одной гомологической точки.

Так как точка b на рис. 126 удовлетворяет тому условию, что внутри параллелограмма $Oadb$ не будет ни одной гомологической точки сетки, определяемой рядами $Oa \ldots$ и $Ob \ldots$, то эта точка b будет находиться в ближайшем ряде, параллельном ряду $Oaa_1a_2 \ldots$

Выберем, вне сетки Oab, гомологическую точку e_0 под условием, чтобы между точками O и e_0 по линии их соединения не было ни одной промежуточной точки. Если ни на поверхности параллелепипеда $Oadbgfee_0$, ни внутри его не будет ни одной гомологической точки, то точка e_0 будет принадлежать плоской сетке, ближайшей к сетке, определяемой рядами $Oaa_1a_2 \ldots$ и $Obb_1b_2 \ldots$

Такие условия действительно выполнены на рис. 126.

В виду того, что для построения рядов и плоских сеток мы можем брать произвольные точки решетки, очевидно, что

таких рядов и сеток мы можем построить бесконечное множество для каждой данной пространственной решетки.

Если два ряда Oa и Ob гомологических точек данной пространственной решетки обладают тем свойством, что внутри параллелограмма, построенного на параметрах Oa и Ob, не будет ни одной гомологической точки решетки, то такие два ряда мы будем называть сопряженными.

Система линий рядов, параллельных двум сопряженным рядам $Oaa_1a_2\dots$ и $Obb_1\dots$, разбивает определяемую этими рядами плоскую сетку на петли, имеющие вид параллелограммов. Такие параллелограммы называются элементарными параллелограммами или петлями данной плоской сетки. Пространство, между двумя ближайшими друг другу параллельными рядами, называется полосой. Таким образом, полоса характеризуется тем, что внутри ее нет ни одной гомологической точки, причем такие точки расположены на двух параллельных прямых, ограничивающих данную полосу.

Два параллельных ряда, содержащих между собой одну полосу, называются смежными.

Если параметры трех рядов Oa, Ob и Oe_0, не лежащих в одной плоскости, могут служить ребрами параллелепипеда, внутри и на гранях которого не будет находиться ни одной гомологической точки, то такие три ряда называются сопряженными рядами. Три плоские сетки, каждая из которых содержит два из трех сопряженных ряда, называются сопряженными плоскими сетками.

Ряд называется сопряженным по отношению к некоторой плоской сетке в том случае, если каждые два сопряженных ряда в этой сетке будут сопряженными с данным рядом.

Пространство, заключенное между двумя ближайшими друг к другу плоскими сетками решетки, называется слоем. Внутри слоя не может быть ни одной гомологической точки.

Две, параллельные между собой плоские сетки, ограничивающие слой, называются смежными. Каждой плоской сетке соответствует две смежные, параллельные ей сетки, расположенные с двух противоположных сторон от данной сетки.

Три системы плоских сеток, параллельные трем сопряженным плоскостям, делят все пространство на ячейки, име-

ющие вид параллелепипедов, равных и совместимых друг с другом. Каждый такой параллелепипед называется элементарным параллелепипедом пространственной решетки.

Наложение друг на друга таких параллелепипедов, при совмещении их равных граней, воспроизводит все гомологические точки данной решетки.

7. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РЕШЕТКИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ СТРУКТУРЫ.

Посмотрим теперь, какой вид будут иметь пространственные решетки в том случае, если у нас имеются системы различных типических первичных параллелоэдров. Прежде всего заметим, что для каждого типического первичного параллелоэдра при выполнении пространства получится своя особая пространственная решетка. Таким образом, мы найдем столько же различных типов пространственных решеток, сколько у нас имеется типов первичных параллелоэдров, т. е. 4.

1) Положим, некоторая часть пространства заполнена типическими первичными трипараллелоэдрами, т. е. кубами, или гексаэдрами. Заменим каждый такой параллелоэдр его центральной точкой, и соединим между собой полученные точки линиями, параллельными ребрам трипараллелоэдра. Получим гексаэдрическую пространственную решетку, причем основным элементарным параллелепипедом такой решетки будет служить куб. Этот случай настолько прост и понятен, что не требует дальнейшего об‘яснения. Часть такой решетки изображена на рис. 127.

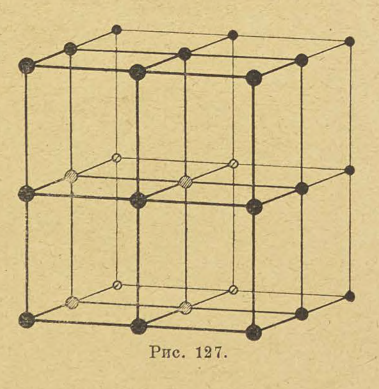


Рис. 127.

2) Взяв некоторую часть пространства, выполненного типическими гексапараллелоэдрами (рис. 128) и заменив каждый такой параллелоэдр центральной точкой, как это пред-

ставлено на рис. 129, где параллелоэдры несколько раздвинуты, получим пространственную решетку, соответствующую этому случаю. Часть такой решетки и изображена на рис. 130.

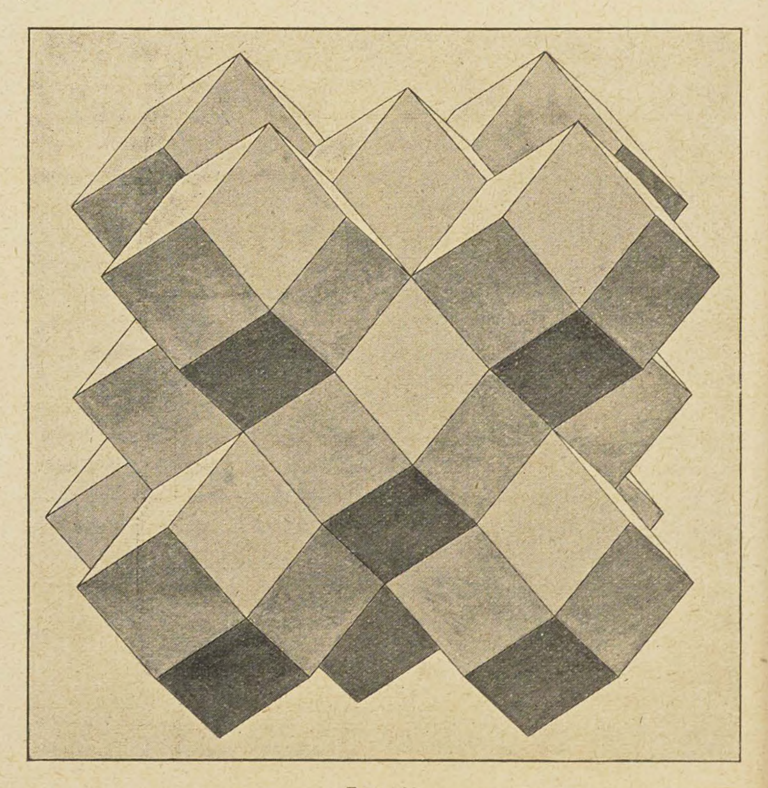


Рис. 128.

Возьмем произвольную точку O (рис. 131) полученной нами решетки, и проведем через нее три прямие Ox_1, Ox_2 и Ox_3, параллельные трем четверным осям, имеющимся в числе элементов симметрии первичного типического параллелоэдра. Сделав такое построение, получим три ряда гомологических

точек, причем ближайшими к точке O гомологическими точками по этим рядам будут точки x_1, x_2 и x_3. Эти три ряда определят три плоских сетки пространственной решетки: Ox_1x_2a, Ox_1x_3b и Ox_2x_3c. Проведя через точки a, b и c плоскости, параллельные найденным плоским сеткам Ox_1x_2a, Ox_1x_3b и Ox_2x_3c, получим куб, в каждой вершине которого

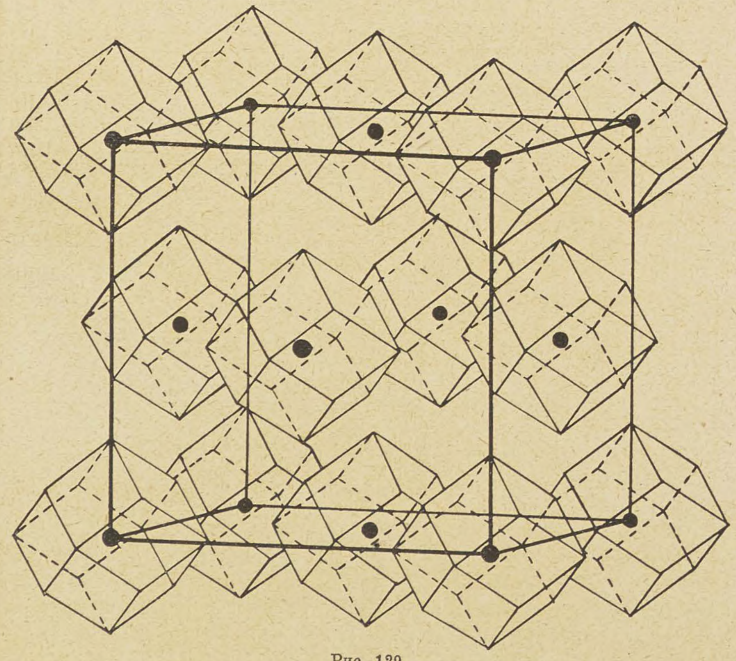


Рис. 129.

и в центре каждой грани будет находиться одна гомологическая точка решетки.

Такой куб, изображенный на рис. 131, назовем симметрической ячейкой для данного вида структуры. Чтобы найти основной элементарный параллелепипед такой решетки (рис. 132), соединим одну из точек, напр. a_1, лежащих в центре грани куба симметрической ячейки с ближайшей к ней

точкой a_0 лежащей в вершине этой ячейки. Получим отрезок $a_0 a_1$, который будет служить одним из ребер основного элементарного параллелепипеда решетки. Соединив прямыми точки a_0 с a_1, a_0 с a_3, соединив также a_1 с a_4 и с a_5; a_2 с a_5 и с a_6; a_3 с a_4 и с a_6; a_4 с a_5 и a_6 с a_7 получим в результате такого построения ромбоэдр, причем длина ребра этого ромбоэдра будет относиться к длине ребра куба симметрической ячейки как $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Этот ромбоэдр будет иметь плоские углы в 60^0 и 120^0. Его двугранные углы равны $70^0 31' 44''$ и $109^0 28' 16''$.

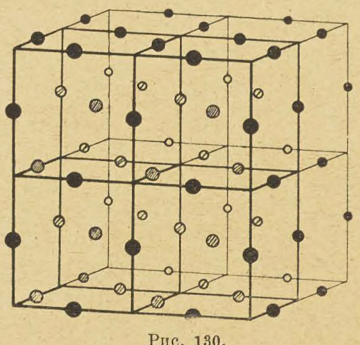


Рис. 130.

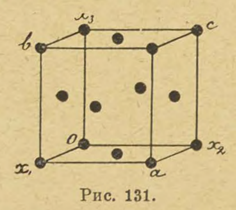


Рис. 131.

Рис. 132.

3) Если мы имеем часть пространства, (рис. 133) выполненного первичными типическими гептапараллелоэдрами, то, заменив каждый такой параллелоэдр гомологической точкой, как это представлено на рис. 134, где параллелоэдры изображены в раздвинутом положении, получим пространственную решетку, характеризующую этот случай. Часть такой решетки изображена на рис. 135.

Возьмем произвольную точку O (рис. 136) такой решетки и проведем через нее три прямые Ox_1, Ox_2 и Ox_3, параллельные трем четверным осям симметрии основного типического гептапараллелоэдра. Построив на рядах Ox_1, Ox_2 и Ox_3 параллелепипед, найдем симметрическую ячейку для этого случая, которая будет представлять собою куб. В каждой

вершине и в центре такого куба будет находиться гомологическая точка решетки.

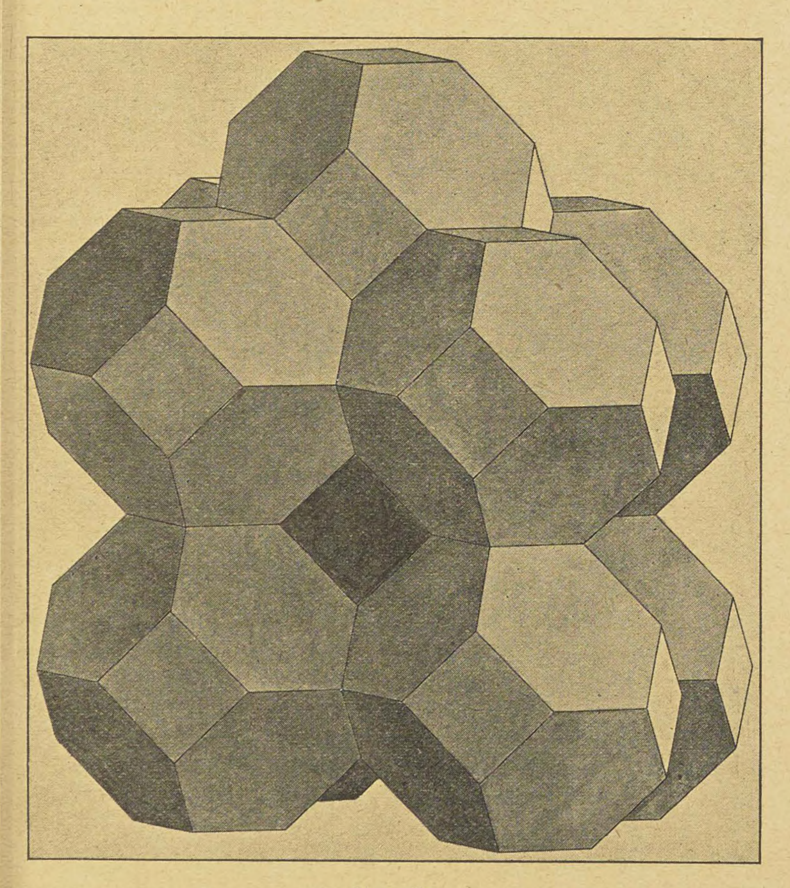


Рис. 133.

Чтобы найти основной элементарный параллелепипед такой решетки (рис. 137), соединим прямыми точку a_0, находящуюся в центре куба симметрической ячейки, с тремя точ-

Рис. 134.

ками a_1, a_2 и a_3, находящимися в вершинах того же куба. Прямые a_0a_1, a_0a_2 и a_0a_3 будут ребрами основного элементарного параллелепипеда. Построив на этих ребрах параллелепипед, увидим, что такой параллелепипед будут ромбоэдром с плоскими углами в $70^0 31' 44''$ и $109^0 28' 16''$. Его двугранные углы будут 60^0 и 120^0. Длина ребра такого параллелепипеда будет относиться к длине ребра куба симметрической ячейки как $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

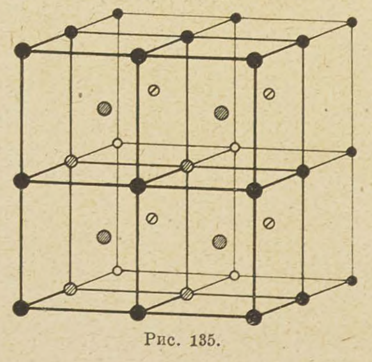


Рис. 135.

Если предположить, что три пространственные решетки, соответствующие типическим первичным параллелоэдрам трех,

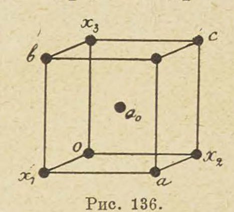


Рис. 136.

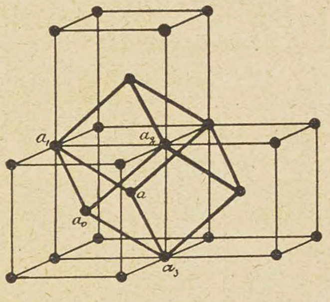


Рис. 137.

только что рассмотренных, различных структур, имеют равные друг другу симметрические ячейки, то легко убедиться, что об'ем элементарного параллелепипеда решетки гексаэдрической структуры будет в 2 раза больше об'ема элементарного параллелепипеда решетки октаэдрической структуры, а этот последний об'ем будет в 2 раза больше об'ема элементарного параллелепипеда пространственной решетки додекаэдрической структуры. В самом деле, из рассмотрения симметрических ячеек соответственных структур мы видим, что каждой симметрической ячейке комплекса гексаэдрической структуры принадлежит одна гомологическая точка, так как каждая точка, находящаяся в вершине куба, будет принадлежать восьми кубам, в виду того, что в каждой вершине сходится именно 8 кубов. Так как у куба 8 вершин, то на каждый элементарный параллелепипед, который можно также рассматривать, как симметрическую ячейку, мы будем иметь только одну гомологическую точку.

В случае октаэдрической структуры, на каждую симметрическую ячейку мы будем иметь две точки: одну, составленную из частей точек, находящихся в вершинах и вторую — центральную гомологическую точку. В случае додекаэдрической структуры мы будем иметь на каждую ячейку: одну точку, составленную из восьми точек, находящихся в вершинах куба, и, кроме того 3 точки, составленные из шести, находящихся в центрах граней, так как каждая из этих точек принадлежит двум кубам.

Если мы обозначим об’ем симметрической ячейки гексаэдрической структуры через V, то тот же самый об’ем будет иметь и элементарный параллелепипед решетки. Для об’ема элементарного параллелепипеда пространственной решетки комплекса октаэдрической структуры найдем $\frac{1}{2} V$, а для комплекса додекаэдрической структуры $\frac{1}{4} V$.

Если мы имеем систему типических первичных тетрапараллелоэдров, то, заменив каждый такой параллелоэдр некоторой гомологической точкой, получим пространственную решетку, часть которой изображена на рис. 138.

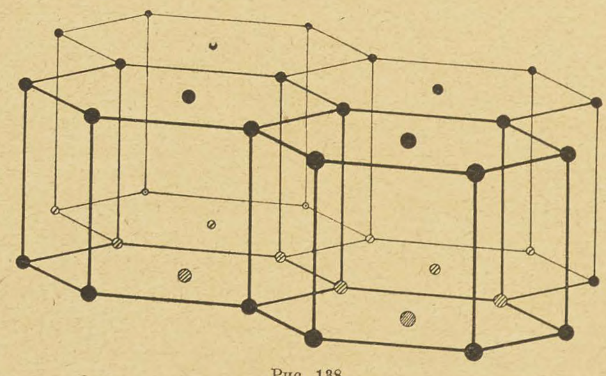


Рис. 138.

Возьмем какую-нибудь точку a_0 этой решетки (рис. 139) и проведем через нее плоскость, параллельную грани пинакоида тетрапараллелоэдра. Эта плоскость будет одной из плоских сеток данной решетки. Соединим прямой $a_0 a_1$ точку a_0 с точкой a_1, ближайшей к точке a_0 и находящейся в той же плоской сетке, параллельной пинакоиду тетрапараллелоэдра. Если мы проведем ряды $a_0 a_2$ и $a_1 a_3$ под углом в 120^0 к ряду $a_0 a_1$ и из точек a_2 и a_3, ближайших

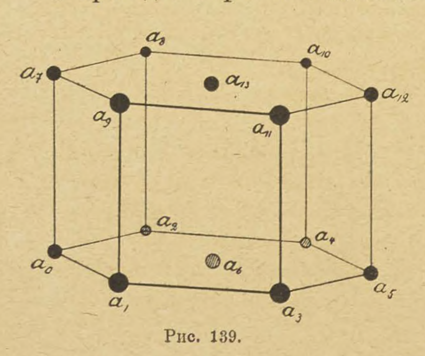


Рис. 139.

к точкам a_0 и a_1 этих рядов, проведем ряды $a_2 a_4$ и $a_3 a_5$, а затем точки a_4 и a_5, ближайшие к точкам a_2 и a_3, соединим прямой, то в построенной нами плоской сетке получим правильный шестиуголник $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ с гомологической точкой a_6 в центре такого шестиугольника. Восставив перпендикуляр из каждой точки, находящейся в вершине такого шестиугольника, к его плоскости, получим шесть рядов решетки. Проведя перпендикулярно к этим рядам через точки a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11} и a_{12} плоскость, параллельную плоской сетке $a_0 a_1 \ldots a_5$, получим плоскую сетку $a_7 a_8 \ldots a_{12}$, в которой опять можем построить правильный шестиугольник $a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$ с центральной точкой a_{13}.

В результате таких построений мы выведем симметрическую ячейку для этого вида структуры, причем такая ячейка будет, как это ясно из рис. 139, представлять собою комбинацию гексагональной призмы и пинакоида. Гомологические точки решетки будут находиться во всех вершинах такой комбинации и в центрах граней пинакоида.

Элементарными параллелепипедами пространственной решетки, в случае типического первичного тетрапараллелоэдра, будет служить комбинация ромбической призмы с пинакоидом, изображенная на рис. 140. Каждая грань пинакоида такой комбинации будет ромбом, делящимся короткой диагональю на два правильных треугольника. Таким образом углы ромба будут 60^0 и 120^0.

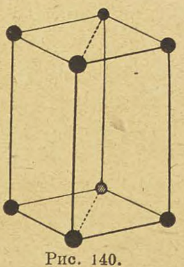


Рис. 140.

Из всего вышеизложенного мы видим, что каждая пространственная решетка, полученная при выполнении пространства определенным видом типического первичного параллелоэдра, будет характеризоваться особой симметрической ячейкой. Каждую симметрическую ячейку мы, в свою очередь, можем рассматривать, как некоторый параллелоэдр, так как она удовлетворяет всем признакам параллелоэдра. Кроме того, симметрия каждой симметрической ячейки одинакова с симметрией параллелоэдра, принятого для образования данной пространственной решетки.

8. ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РЕШЕТКИ.

Посмотрим теперь, какими элементами симметрии, вообще, может обладать пространственная решетка, причем из элементов симметрии мы рассмотрим только оси простой и сложной симметрии, а также плоскость симметрии. Если данная пространственная решетка обладает какой-нибудь осью симметрии наименования n, то это будет обозначать, что в пространственной решетке имеется n равных рядов, не параллельных друг другу и расположенных косо по отношению к L^n.

Если мы возьмем плоскость, перпендикулярную к L^n и проходящую через какую-нибудь гомологическую точку одного из равных рядов, то в этой плоскости должны оказаться гомологические точки, принадлежащие всем равным косым рядам, по одной для каждого ряда.

Таким образом, мы получаем определенную плоскую сетку с симметричным расположением точек, причем из каждой точки будет выводиться $n-1$ точек путем вращения вокруг оси L^n.

Заметим, что на основании рассмотренных выше свойств плоской сетки, мы можем построить в этой сетке систему элементарных параллелограммов, проведя параллельные ряды по двум направлениям, характеризующимся минимальными в данной сетке промежутками рядов. При таком построении мы получаем систему параллелограммов, в вершинах которых будут находиться гомологические точки плоской сетки. Внутри таких параллелограммов не будет находиться ни одной гомологической точки данной решетки.

Если гомологические точки плоской сетки будут совмещаться при вращении вокруг оси L^n, то сама эта ось может пересекать плоскость сетки или 1) в гомологической точке, или 2) вне гомологической точки.

Возможность существования L^2 для пространственных решеток очевидна сама собой, причем эта ось симметрии может пересекаться с перпендикулярной к ней плоской сеткой, как в гомологической точке, так и вне ее.

Существование оси L^3 возможно только в том случае, если в перпендикулярной к ней плоской сетке имеются три гомологические точки, расположенные в вершинах правильного треугольника. Плоская сетка, перпендикулярная к L^3, будет иметь вид треугольной сети (рис. 141), и тройная ось симметрии может пересекать эту сетку, как в гомологической точке, так и в центре правильного треугольника.

L^4 определит в перпендикулярной к ней плоской сетке 4 гомологические точки, расположенные в вершинах квадрата, причем L^4 будет проходить через центр такого квадрата. В этом центре может находиться гомологическая точка, но может ее и не быть.

Предположим, что наименование оси симметрии $n = 5$, т. е.

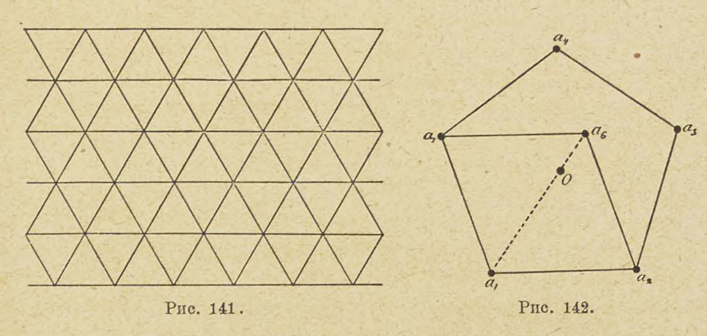


Рис. 141. Рис. 142.

данная пространственная решетка обладает L^5. Возьмем плоскую сетку, перпендикулярную к L^5.

Положим L^5 пересекает эту плоскую сетку в точке O, причем в этой точке пересечения нет гомологической точки сетки (рис. 142). Возьмем на той же сетке гомологическую точку a_1, ближайшую к точке O. Вращая a_1 вокруг L^5, выведем еще четыре точки a_2, a_3, a_4, a_5, которые по построению должны находиться в вершинах правильного пятиугольника. Если мы проведем через a_5 ряд, параллельный a_1a_2, а через точку a_2 ряд, параллельный a_1a_5, то эти два ряда пересекутся в точке a_6. Эта последняя точка a_6 должна быть одной из гомологических точек той же плоской сетки. Из рисунка

ясно, что точка a_6 будет ближе к O, чем точка a_1, что противоречит только что принятому условию. В виду этого, L^5 не может пересекать перпендикулярную к ней плоскую сетку внутри элементарного параллелограмма.

Остается предположить, что точка O пересечения оси L^5 с перпендикулярной к ней плоской сеткой, совпадает с гомологической точкой. Допустив (рис. 142), что точка a_1 есть ближайшая к O гомологическая точка той же сетки и, применив то же самое построение, снова выведем точку a_6, которая будет ближе к точке O, чем точка a_1, а это опять будет противоречить принятому условию.

Таким образом, L^5 не может пересекать перпендикулярной к ней плоской сетки ни в гомологической точке, ни вне ее, т. е., другими словами, в пространственной решетке не может существовать пятерной оси симметрии.

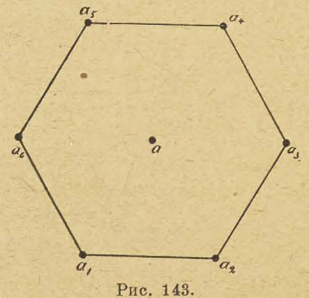


Рис. 143.

Предположим, что данная пространственная решетка обладает шестерной осью симметрии, которая пересекает перпендикулярную к ней плоскую сетку между ее гомологическими точками в точке a. Пусть a_1 будет ближайшая к точке a гомологическая точка той же плоской сетки (рис. 143).

Вращая точку a_1 вокруг L^6, выведем 5 точек a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6, образующих вместе с точкой a_1 вершины правильного шестиугольника. Проведем из точки a_6 ряд, параллельный a_1a_2, а из точки a_2 ряд, параллельный a_1a_6. Эти два ряда пересекутся между собой в точке a, так как сторона шестиугольника равна радиусу описанного круга, т. е. $a_1a_2 = a_1a_6 = aa_2 = aa_6 = aa_1$. Но такой вывод противоречит поставленному условию пересечения L^6 с перпендикулярной к ней плоской сеткой, вне гомологической точки.

Таким образом, L^6 не может пересекать перпендикулярной к ней плоской сетки вне гомологической точки. Приняв условие пересечения L^6 с перпендикулярной плоской сеткой в гомологической точке a, мы не впадем уже в противоречие,

а потому L^6, как элемент симметрии пространственной решетки, вполне возможна.

В случае присутствия L^6, она всегда проходит через гомологическую точку перпендикулярной к ней плоской сетки, чем эта ось симметрии и отличается от других, рассмотренных нами, возможных для пространственной решетки осей симметрии L^2, L^3, L^4, которые, как мы видели, могут пересекать перпендикулярные к ним сетки и не в гомологических точках этих сеток.

Если мы возьмем наименование оси симметрии $n > 6$, то увидим, что все, выведенные из ближайшей данной гомологической точки a_1 (рис. 144), гомологические точки $a_2 a_3 \ldots$ расположатся в вершинах правильного многоугольника, причем, построив на рядах $a_1 a_2$ и $a_1 a_n$ параллелограмм, найдем гомологическую точку a_{n+1}, находящуюся ближе к a, чем a_1, что будет, во всяком случае, противоречить условию. В виду этого, существование осей симметрии L^n, при $n > 6$, для пространственных решеток невозможно.

Таким образом, для пространственных решеток, а следовательно и для кристаллических многогранников, возможно существование только L^2, L^3, L^4 и L^6.

Посмотрим теперь, какие оси сложной симметрии возможны в качестве элементов симметрии пространственной решетки.

Положим, MN (рис. 145) есть плоскость сложной сим-

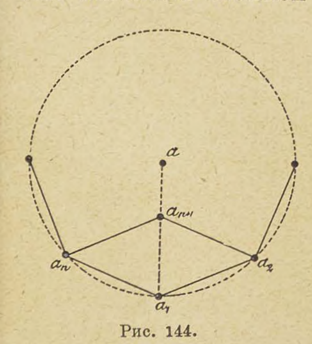


Рис. 144.

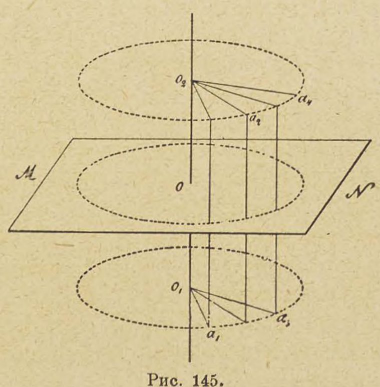


Рис. 145.

метрии, которая пересекается с осью сложной симметрии, наименования $2n$, в точке O. Пусть в некоторой плоской сетке, перпендикулярной к L^n_{2n} и лежащей ниже плоскости MN, a_1 будет одна из ближайших гомологических точек к точке O_1, пересечения этой сетки с L^n_{2n}. Вращая a_1 на угол $\frac{2\pi}{2n}$ и отражая полученную точку в плоскости сложной симметрии, находим точку a_2, лежащую в плоской сетке, параллельной плоскости MN и находящейся выше этой последней. Из точки a_1, вращением вокруг оси L^n_{2n} на угол $\frac{2\pi}{n}$, получим точку a_3, лежащую в той же перпендикулярной к L^n_{2n} плоской сетке, определяемой точками $a_1\,O_1\,a_3$.

Точно таким же способом, из точки a_2 выведем точку a_4, причем, обе эти точки будут лежать в одной и той же плоской сетке, перпендикулярной к L^n_{2n} и определяемой точками a_2, O_2 и a_4. Ряды $a_1\,a_3$ и $a_2\,a_4$ лежат в параллельных друг другу сетках, а следовательно, мы можем и в сетке $a_1\,O_1\,a_3$ провести через точки a_1 и a_3 два ряда, параллельные ряду $a_2\,a_4$. Угловое расстояние между этими двумя рядами, как это ясно из рис. 145, определится величиной двугранного угла $a_1\,O_1\,O_2\,a_2$. Величина этого угла равна $\frac{2\pi}{2n}$.

Если мы проведем из точек a_1 и a_3 ряды, параллельные ряду $a_2 a_4$, то из ряда $a_1\,a_3$ выведется ряд, параллельный ряду $a_2\,a_4$, путем вращения ряда $a_1\,a_3$ вокруг некоторой оси симметрии наименования $2n$ на элементарный угол поворота, соответствующий этой оси. Таким образом, присутствие оси сложной симметрии некоторого наименования в пространственной решетке равносильно присутствию оси симметрии того же наименования. Так как наименование осей симметрии пространственной решетки может быть только 2, 3, 4 и 6, то пространственная решетка, следовательно, может обладать только двойной, четверной и шестерной осями сложной симметрии.

Возможность присутствия в пространственной решетке плоскости симметрии вполне очевидна и не требует особого доказательства.

При рассмотрении симметрии параллелоэдров было уже доказано, что все параллелоэдры могут быть выведены из типических, путем сдвигов и растяжений. При таких сдвигах и растяжениях мы можем только понизить симметрию типического параллелоэдра в различной степени, в зависимости от произведенной деформации. Сравнивая симметрию параллелоэдра и соответствующей основной ячейки пространственной решетки, мы видим, что симметрия их одинакова.

9. ВОЗМОЖНЫЕ ГРАНИ И РЕБРА И ИХ ОТНОШЕНИЕ К ЭЛЕМЕНТАМ СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛА.

Если мы имеем в пространственной решетке L^2, то взяв какие-нибудь две точки a_1 и a_2 (рис. 146) решетки, не лежащие на оси L^2, выведем из каждой точки путем вращения вокруг L^2 ряд, перпендикулярный L^2. Оба выведенные ряда $a_1 a_3$ и $a_2 a_4$ будут перпендикулярны к L^2. Проведем через точку a_2 ряд $a_2 a_5$ — параллельный ряду $a_1 a_3$. Три точки a_2, a_4 и a_5 вполне и однозначно определяют некоторую плоскую сетку MN пространственной решетки. Так как в этой сетке имеются 2 ряда $a_2 a_4$ и $a_2 a_5$, перпендикулярные к оси L^2, то и сама плоская сетка, определяемая этими рядами, будет перпендикулярна к оси L^2.

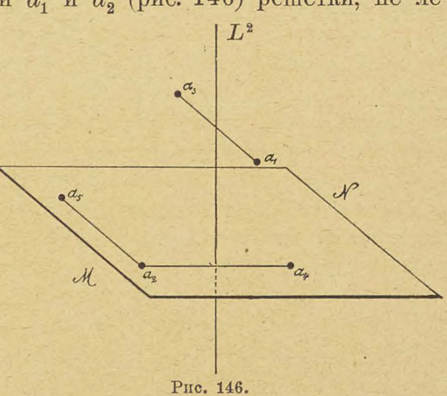


Рис. 146.

Мы уже видели, при рассмотрении осей симметрии наименования выше чем 2, возможных для пространственной решетки, что перпендикулярно к таким осям всегда расположены плоские сетки данной решетки, т. е. возможные грани данного кристаллического комплекса.

Положим, данная пространственная решетка имеет L^2. Возьмем какие-нибудь две гомологические точки решетки a_1 и a_2 (рис. 147), определяющие ряд a_1a_2, не параллельный и не перпендикулярный к L^2.

Вращая этот ряд вокруг L^2 на элементарный угол поворота, соответствующий этой оси, т. е. на 180^0, выведем равный ему ряд a_3a_4. Точки a_1 и a_3 определяют также некоторый ряд той же пространственной решетки. Этот ряд будет перпендикулярен оси L^2 и пересечет эту ось в точке b, находящейся посредине между точками a_1 и a_3. Приняв ряды a_1a_2, a_1a_3, a_3a_4 за стороны параллелограммов, построим сначала три параллелограмма $a_1a_2a_5a_3$, $a_1a_3a_4a_6$ и $a_1a_2a_7a_6$, а затем параллелепипед $a_1 \dots a_8$. Так как ряды a_1a_3 и a_7a_8 равны и параллельны друг другу, а ряд a_1a_3 перпендикулярен L^2, причем точка a_3 выводится из точки a_1 вращением вокруг L^2, то и точка a_8 выводится из точки a_7 также вращением вокруг оси L^2, пересекающей ряд a_7a_8 в точке b_1, посредине между точками a_7 и a_8. Из этого ясно, что ряды a_1a_7 и a_3a_8 будут параллельны оси L^2. Таким образом, в кристаллическом веществе, направления, параллельные L^2, будут всегда возможными ребрами данного кристалла.

Как мы уже видели, в случае присутствия L^n в пространственной решетке должны существоватъ плоские сетки, перпендикулярные к этой оси симметрии. Если $n = 3$, то расположение гомологических точек в плоских сетках, перпендикулярных к L^3, должно быть таково, что эти точки будут располагаться в вершинах правильных треугольников.

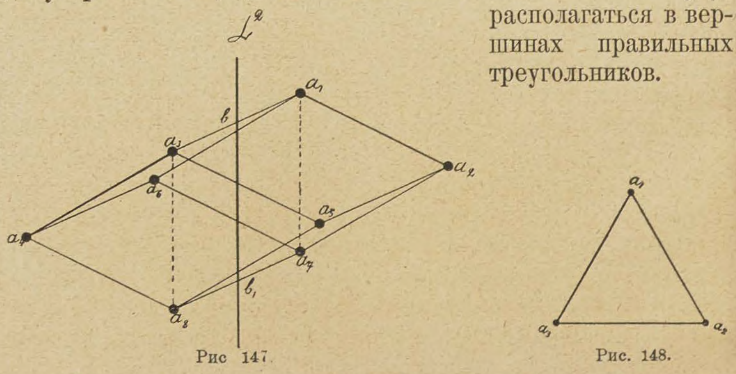


Рис 147

Рис. 148.

Взяв гомологическую точку a_1 (рис. 148) на плоской сетке, перпендикулярной к L^3, и проведя два ряда через точку a_1 и ближайшие к ней точки a_2 и a_3 той же плоской сетки, мы можем построить правильный треугольник $a_1a_2a_3$, проведя ряд через точки a_2 и a_3. Проведя через все гомологические точки плоской сетки ряды, параллельные a_1a_2, a_1a_3 и a_2a_3, получим плоскую сетку, состоящую из правильных треугольников, в вершинах которых будут находиться все гомологические точки этой сетки. Если мы предположим, что такая плоская сетка бесконечно велика, то центр, каждого такого треугольника, будет точкой пересечения L^3, перпендикулярной к плоской сетке.

Взяв другую плоскую сетку, параллельную первой и ближайшую к ней, мы можем и в этой сетке построить такие же треугольники, причем в центре каждого треугольника опять должна будет пройти тройная ось симметрии.

Каждая такая ось совпадет с одной из осей, перпендикулярных к первой плоской сетке. При этом возможны два случая: 1) оси, проходящие через центры треугольников первой плоской сетки, пройдут через гомологические точки второй сетки, 2) тройные оси симметрии снова пройдут через центры треугольников второй плоской сетки. Заметим, что обе сетки параллельны друг другу, а следовательно, через каждую точку второй сетки мы можем провести ряд, параллельный ряду, проведенному в первой плоской сетке и с тем же промежутком, как и в первой сетке. Если мы совместим вторую плоскую сетку с первой, производя движение по направлению L^3, то для первого случая получим такое расположение треугольников первой и второй сетки, какое указано на рис. 149, где треугольники первой сетки начерчены сплошными линиями, а треугольники второй пунктиром. Если мы возьмем третью сетку, ближай-

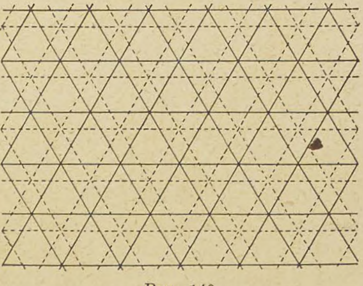


Рис. 149.

шую к второй, то в этой сетке мы можем найти опять только такое расположение треугольников, как в первой или во второй сетке.

Взяв несколько ближайших друг другу параллельных сеток, мы увидим, что каждая L^3 пройдет через несколько гомологических точек т. е. будет возможным ребром кристалла. Во втором случае расположение треугольников, при совмещении всех плоских сеток движением по направлению L^3, даст совмещение всех треугольников каждой сетки с треугольниками других сеток. Ясно, что для этого необходимо, чтобы на перпендикуляре, опущенном из какой-нибудь точки первой плоской сетки, находилась гомологическая точка каждой плоской сетки, параллельной первой. Из этого мы заключаем, что линии, параллельные L^3, опять должны быть возможными ребрами кристаллического комплекса.

Так как L^2_4, L^4 и L^6 в то же время являются и двойными осями симметрии, а L^3_6 – тройная ось симметрии, то, следовательно, ко всем этим осям применимо то же самое заключение, какое мы вывели при рассмотрении случаев L^2 и L^3, а именно: направление, параллельное осям симметрии, есть возможное ребро кристаллического комплекса.

Если в данной пространственной решетке имеется плоскость симметрии P, то из каждой гомологической точки, не лежащей в этой плоскости, мы можем, по закону отражения, вывести еще одну точку, лежащую на перпендикуляре, опущенном из взятой точки на плоскость симметрии. Каждые такие две точки определят ряд пространственной решетки, перпендикулярный к P. Взяв два таких перпендикулярных P и параллельных между собой ряда, мы получим некоторую плоскую сетку, перпендикулярную к P. Заметим, что такие ряды мы можем получить, взяв две произвольные точки пространственной решетки.

Положим, плоскость чертежа (рис. 150) — плоская сетка, перпендикулярная к плоскости симметрии данной пространственной решетки. Пусть MN — линия пересечения плоской сетки с плоскостью симметрии P. Возьмем в плоской сетке какой-нибудь ряд $a_1 a_2$, пересекающий плоскость симметрии в точке b, и не перпендикулярный MN. Отразив точки a_1 и a_2

в плоскости P, получим точки a_3 и a_4, расстояние между которыми будет, по построению, равно расстоянию между точками a_1 и a_2. Проведем из точки a_1 ряд a_1a_5, параллельный a_3a_4 и заметим, что расстояние $a_1a_5 = a_3a_4 = a_1a_2$. Соединим прямой точки a_2 и a_5. В виду равенства: $a_1a_2 = a_1a_5$ треугольник $a_2a_1a_5$ будет равнобедренным, причем $\angle a_1a_2a_5 = \angle a_1a_5a_2$. Из чертежа ясно, что:

$$\angle a_1bl + \angle Nbl + \angle kbN = 180^0$$

и
$$\angle a_2a_1a_5 + \angle a_1a_2a_5 + \angle a_1a_5a_2 = 180^0,$$

как сумма внутренних углов равнобедренного треугольника $a_1a_2a_5$. Вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$\angle a_1bl + \angle Nbl + \angle kbN = \angle a_2a_1a_5 + \angle a_1a_2a_5 + \angle a_1a_5a_2.$$

Заметим, что углы $a_2a_1a_5$ и a_2bl равны, как углы с параллельными сторонами. Кроме того, по построению:

$$\angle kbN = \angle Nbl.$$

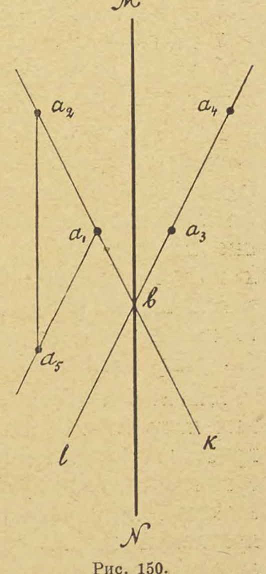


Рис. 150.

В виду этого, из последнего уравнения, сократив его на равные величины, получаем: $\angle kbN = \angle a_1a_2a_5$. Из этого равенства заключаем о параллельности линий MN и a_2a_5. Проведем через точку a_2 ряд $a_2a'_1$, находящийся вне плоскости чертежа рисунка 150. Этот ряд снова определит некоторую плоскую сетку, перпендикулярную к плоскости симметрии P. В этой сетке мы можем найти, путем только что приведенного рассуждения, ряд $a_2a'_5$, параллельный данной плоскости симметрии P. Два ряда a_2a_5 и $a_2a'_5$, пересекающиеся в точке a_2, оба параллельны плоскости P и определят некоторую плоскую сетку, также параллельную данной плоскости симметрии пространственной решетки. Таким образом, мы видим, что плоскости симметрии кристаллического комплекса являются всегда возможными гранями кристалла.

10. УЧЕНИЕ О СИНГОНИИ.

На основании исследования симметрии пространственной решетки, мы можем сделать вывод, что кристаллы, вообще, могут обладать только следующими элементами симметрии: L^2, L^3, L^4, L^6, L_2, L_4^2, L_6^3 и P в различных возможных комбинациях. Другими словами, кристаллические многогранники могут, по своей симметрии, относиться только к тем видам, в которых встречаются только вышеперечисленные элементы симметрии и ни к каким другим.

Если мы пересмотрим все возможные виды симметрии, то увидим, что для кристаллов возможны только 32 вида симметрии, а именно:

5 видов симметрии тетраэдро-октаэдрической системы.
3 вида симметрии моногональной системы.
7 видов симметрии дигональной системы.
7 видов симметрии тригональной системы.
5 видов симметрии тетрагональной системы.
5 видов симметрии гексагональной системы.

Как мы уже видели, в случае присутствия определенных элементов симметрии, в пространственной решетке должны быть равные друг другу и непараллельные между собой ряды гомологических точек. Эти ряды определяют некоторые равные по всем физическим свойствам направления в кристаллическом веществе. Если в пространственной решетке имеется какой-нибудь ряд гомологических точек, не имеющий себе равных непараллельных рядов, то такой ряд определяет особое направление, которое мы называем единичным.

Мы можем сделать полный вывод всех равных и единичных направлений в кристалле, если только симметрия этого кристалла будет в точности установлена. На основании присутствия того или другого количества единичных направлений, а также, на основании наименьшего количества равных направлений, все 32 вида симметрии, возможных для кристаллических многогранников, делятся на 6 групп, называемых сингониями (от греч. *σύγγονος*-родной). Эти сингонии следующие:

1) Гексаэдрическая сингония, характеризующаяся отсутствием единичных направлений. Наименьшее количество равных направлений для этой сингонии 3.

Гексаэдрическая сингония состоит из всех 5-ти видов симметрии тетраэдро-октаэдрической симметрической системы и носит название гексаэдрической или кубической потому, что куб является такой простой формой, которая возможна для каждого вида симметрии этой сингонии. Три равные направления в двух видах симметрии гексаэдрической сингонии, а именно в дитриоктаэдрическом и пентагонально-триоктаэдрическом, совпадают с 3 L^4. В остальных видах симметрии эти три направления — 3 L^2.

Общей характеристикой гексаэдрической сингонии, с точки зрения элементв симметрии, присутствующих во всех видах симметрии этой сингонии, является 4 L^3.

2) Гексагональная сингония характеризуется присутствием одного единичного направления и наименьшим количеством равных направлений — 3.

Гексагональная сингония состоит из 12 видов симметрии, причем из них 7 видов симметрии тригональной симметрической системы и 5 видов гексагональной, не содержащих L^6_{12}.

Эти двенадцать видов симметрии разделяются на две группы, называемые гипосингониями (от греч. ὑπὸ-под-), причем гексагональная гипосингония характеризуется тем, что наименьшее число равных направлений, не перпендикулярных к единичному, будет 6, а в тригональной гипосингонии наименьшее число таких направлений — 3. Единичные направления во всех видах симметрии гексагональной сингонии совпадают с направлением L^6 или L^3, если в виде симметрии нет L^6.

Направления, повторяющиеся не больше трех раз, расположены перпендикулярно к единичному направлению.

Что касается разделения видов симметрии по гипосингониям, то к гексагональной гипосингонии относятся 7 видов симметрии, а именно 5 видов симметрии гексагональной симметрической системы и два вида симметрии тригональной системы, характеризующиеся присутствием L^3 и перпендикулярной к ней плоскости симметрии. К тригональной гипосингонии относятся остальные 5 видов симметрии тригональной системы.

3) Тетрагональная сингония характеризуется одним единичным направлением и наименьшим числом равных направлений — 2.

К тетрагональной сингонии относится 7 видов симметрии, из которых 5 видов симметрии тетрагональной симметрической системы, не содержащих L_8^4 и 2 вида симметрии дигональной симметрической системы, характеризующиеся присутствием L_4^2.

Единичное направление совпадает с L^4 или L_4^2. Равные направления, повторяющиеся наименьшее число раз, находятся в плоскости, перпендикулярной к L^4 или L_4^2. Что касается косых направлений, то эти направления, в каждом виде симметрии, повторяются минимум 4 раза.

4) Ромбическая сингония характеризуется тремя, взаимно перпендикулярными, единичными направлениями. Наименьшее число равных направлений — 2.

К ромбической сингонии относится 3 вида симметрии дигональной симметрической системы: 1) $L^2\,2\,P$, 2) $3\,L^2$ и 3) $3\,L^2\,3\,Pc$. Это будут, следовательно, те виды симметрии, в которых нет L_4^2 и имеется не менее 3-х элементов простой симметрии.

Во всех видах симметрии этой сингонии одно из единичных направлений совпадает с L^2. Два других, перпендикулярных к первому, единичных направления в первом виде симметрии ($L^2\,2\,P$) находятся в плоскостях симметрии, а во втором и третьем, так же, как и первое единичное направление, — совпадают с L^2.

Равные направления, повторяющиеся в виде симметрии $L^2\,2\,P$ два раза, находятся или в плоскостях симметрии или в плоскости, перпендикулярной к L^2.

В виде симметрии $3\,L^2$ два раза повторяются все направления, находящиеся в плоскостях, проходящих через две двойные оси симметрии (кроме самих L^2, которые, как уже сказано, будут единичными).

В виде симметрии $3\,L^2\,3\,Pc$ наименьше число раз будут повторяться направления, совпадающие с плоскостями симметрии.

5) Моноклинная сингония характеризуется одним единичным направлением и плоскостью единичных направлений, перпендикулярной к этому единичному направлению. Все другие направления повторяются два раза. К моноклинной сингонии относится 3 вида симметрии:

1) P — моногональной симметрической системы.

2) L^2 | — оба дигональной симметрической системы.
3) L^2Pc |

Все направления, совпадающие и перпендикулярные элементам простой симметрии, имеющимся в данном виде симметрии моноклинной сингонии, будут единичными направлениями. Остальные направления повторяются два раза.

6. Триклинная сингония характеризуется тем, что все направления в кристаллах, относящихся к этой сингонии, будут единичными.

К этой сингонии относятся два вида симметрии моногональной системы 1) $(\infty L')$ и 2) $(\infty L'_2) = c$. Равных направлений в триклинной сингонии нет.

Все виды симметрии, возможные для кристаллических многогранников, и те простые формы, которые имеются в каждом виде симметрии, представлены на прилагаемых таблицах (5—9).

11. ПОДЧИНЕННОСТЬ ВИДОВ СИММЕТРИИ.

В каждой сингонии имеется один вид симметрии, подчиняющий себе все остальные виды симметрии той же сингонии. Эти подчиняющие виды симметрии будут следующие:

Гексаэдрическая сингония — дитриоктаэдрический вид симметрии.

Гексагональная сингония:

Гексагональная гипосингония — дигексагонально-дипирамидальный вид симметрии.

Тригональная гипосингония — дигексагонально-скаленоэдрический вид симметрии.

Тетрагональная сингония — дитетрагонально-дипирамидальный вид симметрии.

Моноклинная сингония — ромбопризматический вид симметрии.

Гексаэдрическая (кубическая) сингония

Общая характеристика $4L^3$

Элементы симметрии	$3L^2 4L^3$	$3L^2 4L_6^3 3P$	$3L_4^2 4L^3 6P$	$3L^4 4L^3 6L^2$	$3L^4 4L_6^3 6L^2 9P$
Расположение граней форм относительно элементов симметрии	Простые общие формы				
	Пентагональный тритетраэдр	Дидодекаэдр	Дитритетраэдр	Пентагональный триоктаэдр	Дитриоктаэдр
$\perp L^3$	Тетраэдр	Октаэдр	Тетраэдр	Октаэдр	
$\perp L^2$	Гексаэдр			Ромбический додекаэдр	
$\parallel L^2$	Пентагональный додекаэдр		Пирамидальный гексаэдр	Пирамидальный октаэдр, если $q > n\sqrt{3}$	
	Ромбический додекаэдр, если отрезки по $2L^2$ равны		Ромбический додекаэдр, если грань $\perp P$	Триоктаэдр, если $q < n\sqrt{3}$	
$\perp L^4$				Гексаэдр	
$\parallel L^4$				Пирамидальный гексаэдр	
$\perp$ плоскости, проходящей через L^3	Тритетраэдр, если $m > n\sqrt{3}$	Пирамидальный октаэдр, если $m > n\sqrt{3}$	Тритетраэдр, если $m > n\sqrt{3}$		
	Пирамидальный тетраэдр, если $m < n\sqrt{3}$	Триоктаэдр, если $m < n\sqrt{3}$	Пирамидальный тетраэдр, если $m < r\sqrt{3}$		

Примечание: m-отрезок по L^2, n-отрезок по L^3, q-отрезок по L^4.

Тетрагональная сингония

Общая характеристика: одна L^4 или L_4^2

Элементы вида симметрии	L^4	$L^4 P$	$L^4 4 P_1$	$L^4 4 L^2$	$L^4 4 L^2 P 4 P_1$	L_4^2	$L_4^2 2 L^2 2 P_1$
Расположение граней относительно элементов симметрии в простых формах	Простые общие формы						
	Тетрагональная пирамида	Тетрагональная дипирамида	Дитетрагональная пирамида	Дитетрагональный трапецоэдр	Дитетрагональная дипирамида	Тетрагональный сфеноид	Дитетрагональный скаленоэдр
$\perp L^4$ или $\perp L_4^2$	Гемипинакоид	Пинакоид	Гемипинакоид	Пинакоид			
$\parallel L^4$ или $\parallel L_4^2$	Тетрагональная призма		Дитетрагональная призма			Тетрагональная призма	Дитетрагональная призма
$\parallel L^4$ и $\perp P_1$ или $\parallel L_4^2$ и $\perp P_1$			Тетрагональная призма		Тетрагональная призма		Тетрагональная призма
$\parallel L^4$ и $\perp L^2$ или $\parallel L_4^2$ и $\perp L^2$				Тетрагональная призма			Тетрагональная призма
$\perp P_1$ или $\perp$ плоскости, проходящей через L^4 или L_4^2 и L^2			Тетрагональная пирамида		Тетрагональная дипирамида		Тетрагональный сфеноид

Примечание: P - плоскость симметрии, перпендикулярная к L^4
P_1 - „ „ проходящая через L^4 или L_4^2

Гексагональная сингония. Гексагональная гипосингония

Общая характеристика: одна L^6 или $L^3_{6'}$

Элементы вида симметрии	L^6	$L^6 P$	$L^6 6P_1$	$L^6 6L^2$	$L^6 6L^2 P 6P_1$	$L^3_{6'} P$	$L^3_{6'} 3L^2 3P_1 P$
Расположение граней относительно элементов симметрии в простых формах	Простые общие формы						
	Гексагональная пирамида	Гексагональная дипирамида	Дигексагональная пирамида	Дигексагональный трапецоэдр	Дигексагональная дипирамида	Тригональная дипирамида	Дитригональная дипирамида
$\perp L^6$ или $\perp L^3_{6'}$	Гемипинакоид	Пинакоид	Гемипинакоид	Пинакоид			
$\parallel L^6$ или $\parallel L^3_{6'}$	Гексагональная призма		Дигексагональная призма			Тригональная призма	Дитригональная призма
$\parallel L^6$ и $\perp P_1$ или $\parallel L^3_{6'}$ и $\perp P_1$			Гексагональная призма		Дигексагональная призма		Тригональная призма
$\parallel L^6$ и $\perp L^2$ или $\parallel L^3_{6'}$ и $\perp L^2$				Гексагональная призма			Тригональная призма
$\perp P_1$ или $\perp$ плоскости, проходящей через L^6 или $L^3_{6'}$ и L^2			Гексагональная пирамида		Гексагональная дипирамида		Тригональная пирамида

Примечание: P - плоскость симметрии перпендикулярная к L^6 или $L^3_{6'}$,
P_1 - „ „ проходящая через L^6 или $L^3_{6'}$,

$L^3_{6'}$ — шестерная ось сложной симметрии второго рода

Гексагональная сингония. Тригональная гипосингония

Общая характеристика: одна L^3 или $L_6{}^3$

Элементы симметрии	L^3	$L^3 3 P_1$	$L^3 3 L^2$	$L_6{}^3$	$L_6{}^3 3 L^2 3 P_1$
Расположение граней относительно элементов симметрии в простых формах	Простые общие формы				
	Тригональная пирамида	Дитригональная пирамида	Дитригональный трапецоэдр	Гексагональный дидельтоэдр	Дигексагональный скаленоэдр
$\perp L^3$ или $\perp L_6{}^3$	Гемипинакоид		Пинакоид		
$\parallel L^3$ или $\parallel L_6{}^3$	Тригональная призма	Дитригональная призма		Гексагональная призма	Дигексагональная призма
$\parallel L^3$ и $\perp P_1$ $\parallel L_6{}^3$ и $\perp P_1$		Тригональная призма			Гексагональная призма
$\parallel L^3$ и $\perp L^2$ $\parallel L_6{}^3$ и $\perp L^2$			Тригональная призма		Гексагональная призма
$\perp P_1$ или $\perp$ плоскости проходящей через L^3 или $L_6{}^3$ и L^2		Тригональная пирамида			Гексагональный дидельтоэдр

Примечание: P_1 - плоскость симметрии, п[illegible]одящая через L^3 или $L_6{}^3$

	Ромбмческая сингония. Общая характеристика: высшее наименование имеющейся во всех видах оси симметрии 2			Моноклинная сингония. Общая характеристика: постоянное присутствие L^2 или P			Триклинная сингония. Общая характеристика: высшее наименование оси симметрии 1	
Элементы вида симметрии	$3L^2$	$L^2 2P_1$	$3L^2 3Pc$	L^2	P	$L^2 Pc$	$(\infty L')$	$C = (\infty L'_2)$
Расположение граней относительно элементов симметрии в простых формах	Простые общие формы							
	Ромбический сфеноид	Ромбическая пирамида	Ромбическая ди пирамида	Геми-призма с осью	Геми-призма без оси	Ромбическая призма	Гемипинакоид	Пинакоид
$\perp L^2$	Пинакоид	Гемипинакоид	Пинакоид	Гимипинакоид		Пинакоид		
$\parallel L^2$	Ромбическая призма	Ромбическая призма	Ромбическая призма	Пинакоид		Пинакоид		
$\perp P$		Пинакоид	Ромбическая призма		Гемипинакоид	Пинакоид		
$\parallel P$		Пинакоид	Ромбическая призма		Пинакоид	Пинакоид		

Примечание: P_1 — плоскость симметрии, проходящая через L^2

Триклинная сингония, — пинакоидальный вид симметрии.

Между этими подчиняющими видами симметрии различных сингоний имеется опять связь подчинения а именно: дитриоктаэдрическому виду симметрии подчинены все остальные, кроме дигексагонально-дипирамидального, а этому последнему — все виды, кроме дитриоктаэдрического и дитетрагонально-дипирамидального.

Подчиненность различных видов симметрии, возможных для кристаллических многогранников, изображена на прилагаемой таблице № 10.

12. ПАРАЛЛЕЛОЭДРЫ В РАЗНЫХ ВИДАХ СИНГОНИЙ.

В виду существования указанных выше взаимоотношений подчиненности, мы можем из типических первичных параллелоэдров вывести, путем гомогенных деформаций, ряд параллелоэдров, относящихся по своей внешней симметрии к другим сингониям. Для вывода таких параллелоэдров мы будем поступать последовательно, а именно из типических первичных параллелоэдров выведем сначала все виды, относящиеся к тетрагональной и гексагональной сингониям, путем одного прямого растяжения по осям симметрии L^n, где $n > 2$. Из полученных параллелоэдров выведем параллелоэдры ромбической сингонии путем растяжения параллелоэдров тетрагональной и гексагональной сингоний по L^2.

Из этих последних параллелоэдров мы можем получить параллелоэдры моноклинной сингонии путем сдвига, плоскостью которого будет служить некоторая плоскость, параллельная одной из L^2, причем направление сдвига будет $\perp$ той же L^2.

Наконец, из параллелоэдров моноклинной сингонии, мы можем вывести параллелоэдры триклинной сингонии при помощи сдвига с произвольной плоскостью и направлением.

Вообще, каждая сингония характеризуется рядом первичных параллелоэдров, которые по своей внешней симметрии все будут относиться к одному и тому же виду симметрии.

Посмотрим теперь, какие параллелоэдры мы можем вывести из типических, подвергая их последовательно различным гомогенным деформациям.

Подвергнув типический первичный параллелоэдр кубического типа строения растяжению по L^4, получим:

1) из гексаэдра — комбинацию тетрагональной призмы и пинакоида.

2) из ромбического додекаэдра — комбинацию тетрагональной призмы и тетрагональной дипирамиды.

3) из комбинации куба и октаэдра — комбинацию тетрагональной дипирамиды, тетрагональной призмы и пинакоида.

Все выведенные комбинации, по своей внешней симметрии, вне зависимости от величины растяжения, будут относиться к дитетрагонально-дипирамидальному виду симметрии тетрагональной сингонии, а именно будут иметь: $L^4\,4\,L^2\,5\,Pc$.

Деформация растяжения по L^6 какого-нибудь типического тетрапараллелоэдра не изменит его симметрии, которая по прежнему останется дигексагонально-дипирамидального вида симметрии гексагональной гипосингонии, т. е. будет иметь $L^6\,6\,L^2\,7\,Pc$.

Подвергнув один из типических первичных параллелоэдров кубического типа гомогенной деформации прямого растяжения по одной из трех осей L_6^3, получаем:

1) из куба — ромбоэдр.

2) из ромбического додекаэдра — комбинацию ромбоэдра и гексагональной призмы.

3) из комбинации куба и октаэдра — комбинацию двух ромбоэдров и пинакоида.

Все выведенные комбинации будут относиться к дигексагонально-скаленоэдрическому виду симметрии тригональной гипосингонии т. е. будут иметь $L_6^3\ 3\ L^2\ 3\ P$.

Для вывода параллелоэдров ромбической сингонии, мы можем воспользоваться растяжением, по какой-нибудь из двойных осей симметрии, любого параллелоэдра гексагональной сингонии. Получающиеся, таким путем, параллелоэдры ромбической сингонии обладают симметрией $3\ L^2\ 3\ Pc$ т. е. относятся к ромбо-дипирамидальному виду симметрии.

Для вывода параллелоэдра моноклинной сингонии достаточно применить сдвиг к полученному параллелоэдру ромбической сингонии, причем направление такого сдвига должно быть перпендикулярно к одной из трех L^2 параллелоэдра,

а плоскость сдвига — параллельна той же самой двойной оси симметрии. Полученные параллелоэдры будут иметь $L^2 Pc$, т. е. относятся к ромбо-призматическому виду симметрии моноклинной сингонии.

Для вывода параллелоэдров триклинной сингонии из параллелоэдров моноклинной сингонии применяется триклинный сдвиг. Плоскость этого сдвига перпендикулярна плоскости симметрии деформируемого параллелоэдра моноклинной сингонии, а направление сдвига может быть совершенно произвольным. Так как положение плоскости триклинного сдвига обусловлено только ее перпендикулярностью к плоскости симметрии моноклинного параллелоэдра, а таких плоскостей может быть бесконечное множество, то ясно, что плоскость триклинного сдвига не имеет какого-нибудь заранее определенного положения, причем это положение может быть иррациональным, что обыкновенно и наблюдается.

Выведенные таким путем параллелоэдры триклинной сингонии будут обладать только одним элементом симметрии, а именно центром обратного равенства и будут представлять собою комбинацию трех, четырех, шести или семи пинакоидов.

13. КОМПЛЕКСИАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Так как после некоторой гомогенной деформации данного многогранника, количество его граней и ребер остается тем же самым, каким оно было до его деформации, и всякий многоугольник грани остается многоугольником с тем же числом сторон, то все выведенные комбинации будут представлять собою параллелоэдры с тем же количеством пар граней, какое они имели и в типическом виде, причем все четырехугольные грани останутся четырехугольными и после деформации, а шестиугольные грани — также останутся шестиугольниками с парами равных и параллельных сторон.

Мы уже видели, что симметрия основной ячейки пространственной решетки одинакова с симметрией того типического первичного параллелоэдра, которым характеризуется данная пространственная решетка. Кроме того, каждая пространственная решетка может быть вполне определена не-

которым элементарным параллелепипедом. Но мы знаем, на основании свойств фигур, подвергнутых гомогенным деформациям, что всякий параллелепипед сдвигами и растяжениями можно превратить в любой данный.

Из этого мы заключаем, что при помощи гомогенных деформаций, мы можем любой кристаллический комплекс превратить в данный, так как каждый кристалл характеризуется определенной пространственной решеткой. Такие превращения пространственных решеток мы можем осуществить также при помощи гомогенных деформаций, аналогичных тем, которые мы применяли для вывода параллелоэдров более низкой симметрии из параллелоэдров более высокой симметрии, причем симметрия кристаллического комплекса будет той же самой, как и симметрия характеризующего данный комплекс первичного параллелоэдра.

Таким образом, мы можем различать следующие 7 видов комплексиальной симметрии:

1) Дитриоктаэдрический вид симметрии гексаэдрической сингонии $3L^4 4L_6^3 6L^2 9Pc$ с тремя видами структуры кубического типа, а именно: гексаэдрическим, додекаэдрическим и октаэдрическим.

2) Дигексагонально-дипирамидальный вид симметрии гексагональной гипосингонии $L^6 6L^2 7Pc$ с одним призматическим видом структуры гипогексагонального типа.

3) Дитригонально-скаленоэдрический вид симметрии $L_6^3 3L^2 3P$ тригональной гипосингонии со всеми возможными видами структуры.

4) Дитетрагонально-дипирамидальный вид симметрии $L^4 4L^2 5Pc$ тетрагональной сингонии с тремя видами структуры кубического типа.

5) Ромбо-дипирамидальный вид симметрии $3\alpha^2 3Pc$ ромбической сингонии со всеми четырьмя видами структуры.

6) Ромбо-призматический вид симметрии L^2Pc моноклинной сингонии тоже с четырьмя видами структуры.

7) Пинакоидальный вид симметрии c триклинной сингонии, для которого возможны все четыре вида структуры.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

III. МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ НА ПЛОСКОСТИ.

Стр.

1. Проекции и их значение 3
2. Проекции, применяемые при изображении кристаллических многогранников на плоскости 4
3. Линейная и гномоническая проекции 7
4. Общие свойства линейной и гномонической проекций 9
5. Связь между линейной и гномонической проекциями 12
6. Задачи, решаемые при помощи линейной и гномонической проекций 14
7. Общие замечания о свойствах линейной и гномонической проекции 26
8. Получение изображения кристаллического многогранника в стереографических проекциях 27
9. Общие свойства стереографической проекции 29
10. Общая теорема о симметрии косого круглого конуса 31
11. Первая основная теорема стереографических проекций 34
12. Положения, выводящиеся из первой основной теоремы стереографических проекций 38
13. Вторая основная теорема стереографических проекций 44
14. Связь между проекциями линейной, гномонической и стереографической 46
15. Основные задачи, решаемые при помощи стереографических проекций 53
16. Стереографическая сетка 60
17. Изменение плоскости проекций 64
18. Проекция при помощи векториальных кругов 66
19. Ортогональные проекции кристаллических многогранников . . . 67
20. Изображение кристаллических многогранников в косых ортогональных проекциях 67
21. Ортографическая проекция 74

IV. СТРОЕНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА.

Стр.
1. Структура кристаллов 76
2. Вывод типических первичных параллелоэдров 85
3. Виды и типы структуры 89
4. Пространственные решетки 90
5. Зоны (пояса) кристаллических комплексов 94
6. Построение пространственной решетки 96
7. Пространственные решетки для различных видов структуры . . 101
8. Элементы симметрии пространственной решетки 110
9. Возможные грани и ребра и их отношение к элементам симметрии кристалла 115
10. Учение о сингонии 120
11. Подчиненность видов симметрии 123
12. Параллелоэдры в разных видах сингоний 129
13. Комплексиальная симметрия 131

ТАБЛИЦА № 10

Подчиняющие виды симметрии

Подчиненные виды симметрии

	$3L^4 4L_6^3 6L^2 9P$	$3L^4 4L^3 6L^2$	$3L_4^2 4L^3 6P$	$3L^2 4L_6^3 3P$	$3L^2 4L^3$	$L^6 6L^2 P 6P_1 c$	$L^6 6L^2$	$L^6 6P_1$	$L^6 Pc$	L^6	$L^3 P 3P_1 3L^2$	$L^3 P$	$L_6^3 3L^2 3Pc$	L_6^3	$L^3 3L^2$	$L^3 3P_1$	L^3	$L^4 4L^2 P 4P_1 c$	$L^4 4L^2$	$L^4 4P_1$	$L^4 Pc$	L^4	$L_4^2 2L^2 2P_1$	L_4^2	$3L^2 3Pc$	$3L^2$	$L^2 2P_1$	$L^2 Pc$	L^2	P	c	$(\infty L')$
$3L^4 4L_6^3 6L^2 9P$	×																															
$3L^4 4L^3 6L^2$	×	×																														
$3L_4^2 4L^3 6P$	×	o	×																													
$3L^2 4L_6^3 3P$	×	o	o	×																												
$3L^2 4L^3$	×	×	×	×	×																											
$L^6 6L^2 P 6P_1 c$	o	o	o	o	o	×																										
$L^6 6L^2$	o	o	o	o	o	×	×																									
$L^6 6P_1$	o	o	o	o	o	×	o	×																								
$L^6 Pc$	o	o	o	o	o	×	o	o	×																							
L^6	o	o	o	o	o	×	×	×	×	×																						
$L^3 P 3P_1 3L^2$	o	o	o	o	o	×	o	o	o	o	×																					
$L^3 P$	o	o	o	o	o	×	o	o	×	o	×	×																				
$L_6^3 3L^2 3Pc$	×	o	o	o	o	×	o	o	o	o	o	o	×																			
L_6^3	×	o	o	×	o	×	o	o	×	o	o	o	×	×																		
$L^3 3L^2$	×	×	o	o	o	×	×	o	o	o	×	o	×	o	×																	
$L^3 3P_1$	×	o	×	o	o	×	o	×	o	o	×	o	×	o	o	×																
L^3	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×															
$L^4 4L^2 P 4P_1 c$	×	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	×														
$L^4 4L^2$	×	×	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	×	×													
$L^4 4P_1$	×	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	×	o	×												
$L^4 Pc$	×	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	×	o	o	×											
L^4	×	×	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	×	×	×	×	×										
$L_4^2 2L^2 2P_1$	×	o	×	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	×	o	o	o	o	×									
L_4^2	×	o	×	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	×	×	×	×	o	×	×								
$3L^2 3Pc$	×	o	o	×	o	×	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	×	o	o	o	o	o	o	×							
$3L^2$	×	×	×	×	×	×	×	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	×	×	o	o	o	×	o	×	×						
$L^2 2P_1$	×	o	×	×	o	×	o	×	o	o	×	o	o	o	o	o	o	×	o	×	o	o	×	o	×	o	×					
$L^2 Pc$	×	o	o	×	o	×	o	o	×	o	o	o	o	o	o	×	o	×	o	o	×	o	o	o	×	o	o	×				
L^2	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	o	×	o	o	×	o	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×			
P	×	o	×	×	o	×	o	×	×	o	×	×	o	×	o	×	o	×	o	×	×	o	×	o	×	o	×	×	o	×		
c	×	o	o	×	o	×	o	o	×	o	o	o	o	o	o	×	×	×	o	o	×	o	o	o	×	o	o	×	o	o	×	
$(\infty L')$	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОГО ЗНАНИЯ

Находятся в печати:

ЛИНДОВ. Интегральное исчисление.
ШУМБУРГ. Туберкулез.
РОТ. Основы электротехники.
КРАНЦ. Тригонометрия на плоскости.
ЛЕБ. Биохимия.
МАКСВЕЛ. Материя и движение. С пред. А. Эйнштейна.
ЛОВАЧЕК. Использование водяной энергии.
ВУНДТ. Эллинское мировоззрение.
АРНДТ. Электрохимия.
ФАТЕР. Паровая машина. В двух частях.
ТЕЗИНГ. Экспериментальная биология.
ЗАКС. Строение и жизнь человеческого тела.
ЯКОВЕНКО. Соломон Маймон.
ЛЕМАН. Кинематография.
АСТЕР. Введение в психологию.
ЦУНЦ. Питание человека.
ДОРОШЕНКО. Очерки по истории славянских литератур. В трех частях.
БЕРНШТЕЙН. Видимые и невидимые лучи.
БАВИНК. Введение в органическую химию.
БАВИНК. Введение во всеобщую химию.
БАВИНК. Введение в неорганическую химию.
АНИЧКОВ. Западная литература и славянство.
ТЕЙХМАН. Оплодотворение и наследственность.
ШУМБУРГ. Венерические болезни.
РЮСТ. Искусственное изготовление веществ.
ПЕТЕР. Планеты.
ЯКОВЕНКО. Чаадаев.
КЮММЕЛЬ. Фотохимия.
АНИЧКОВ. История французской литературы.
КРАУЗЕ. Солнце.
КОБРАК. Уход за младенцем.
КАЙЗЕР. Азот и его утилизация.
ШКЛОВСКИЙ. Современная русская проза.
ГАМЕЛЬ. Основные понятия механики.
БИДЕРМАН. Взрывчатые вещества.
ШМИДТ. Число и форма.
ШВАРЦ. Освальд Шпенглер.

ИЗДАТЕЛЬСТВО И. П. ЛАДЫЖНИКОВА
БЕРЛИН W 50